DISCIPLINA: SINAIS E SISTEMAS

PROFESSOR: RENATO DOURADO MAIA

EXEMPLOS RESOLVIDOS – AULA 5: SINAIS E SISTEMAS – FUNDAMENTOS

Exemplo 1: Determine se os sistemas abaixo possuem o seu inverso. Em caso afirmativo, determine o sistema inverso.

$$\text{(a)}\ \ y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \quad \text{(b)}\ \ y(t)=\frac{dx(t)}{dt}$$

Solução (a):

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo: $y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau = X(t)-X(-\infty)$

Derivando os dois lados: $\frac{dy(t)}{dt}=\frac{d(X(t)-X(-\infty))}{dt}=x(t)$

Então, o sistema é invertível.

Solução (b):

Será utilizada a prova pela contrapositiva, isto é, por meio de um contra-exemplo:

Considere $y(t)=\frac{dx(t)}{dt}$, e $x(t)=z(t)+C$. Logo, $y(t)=\frac{dx(t)}{dt}=\frac{d(z(t)+C)}{dt}=\frac{dz(t)}{dt}$.

O valor da constante C não altera o resultado. Então, o sistema é não invertível.

Exemplo 2: Determine se os sistemas abaixo são estáveis:

$$\textbf{(a)}\ \ y[n]=x[n]^2 \quad \textbf{(b)}\ \ y(t)=\sin(2\pi x(t)) \quad \textbf{(c)}\ \ y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \quad \textbf{(d)}\ \ y(t)=\frac{dx(t)}{dt} \quad \textbf{(e)}\ \ y[n]=\frac{1}{11}\sum_{k=-5}^{5} x[n+k]$$

Solução (a):

Definição: $|x[n]|<\infty$ ou $|x[n]|<M$, em que M é um número real finito. Logo:

$$
\begin{aligned}
y[n] &= x[n]^2 \\
|y[n]| &= |x[n]^2| \\
|y[n]| &= |x[n]|^2 \\
|y[n]| &= M^2
\end{aligned}
$$

Como M é um número real finito, o sistema é estável.

Solução (b):

Definição: $|x[n]| < \infty$ ou $|x[n]| < M$, em que M é um número real finito.

Lembrando: $|\sin(.)| < 1$. Logo:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= sen(2\pi x(t)) \\
|y(t)| &= |sen(2\pi x(t))| \\
|y(t)| &\leq 1
\end{aligned}
$$

O sistema é estável.

Solução (c):

Definição: $|x[n]| < \infty$ ou $|x[n]| < M$, em que M é um número real finito. Logo:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \\
|y(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \right| \\
y(t) &\leq \int_{-\infty}^{t} |x(\tau)|d\tau \\
y(t) &\leq \int_{-\infty}^{t} Md\tau \\
y(t) &\leq M\ \tau\Big|_{-\infty}^{t}
\end{aligned}
$$

O valor da integral depende de t, que pode valer ∞, e tem como limite inferior $-\infty$. Então, o sistema é instável.

Solução (d):

Definição: $|x[n]| < \infty$ ou $|x[n]| < M$, em que M é um número real finito.

Será utilizada a prova pela contrapositiva, isto é, por meio de um contra-exemplo:

Considere $x(t)$ como um degrau unitário. $x(t)$ é limitado, pois $|x(t)| < 1$. A derivada de $x(t)$ é o impulso unitário, que tem amplitude infinita. Assim, o sistema é instável.

Solução (e):

Definição: $|x[n]| < \infty$ ou $|x[n]| < M$, em que M é um número real finito. Logo:

$$y[n] = \frac{1}{11}\sum_{k=-5}^{5} x[n+k]$$
$$|y[n]| = \left|\frac{1}{11}\sum_{k=-5}^{5} x[n+k]\right|$$
$$|y[n]| \le \frac{1}{11}\sum_{k=-5}^{5} |x[n+k]|$$
$$|y[n]| \le \frac{1}{11}\sum_{k=-5}^{5} M$$
$$|y[n]| \le M$$

Como M é um número real finito, o sistema é estável.

Exemplo 3: Determine se os sistemas abaixo são invariantes no tempo:

(a) $y[n] = x[n]^2$ **(b)** $y(t) = x(2t)$ **(c)** $y(t) = x(t/3)$ (d) $y(t) = x(2-t)$ **(e)** $y[n] = x[-n]$ **(f)** $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$

Solução – Idéia Básica:

$$y(t)\big|_{t-t_0} = y(t)\big|_{x(t-t_0)}$$
$$y[n]\big|_{n-n_0} = y[n]\big|_{x[n-n_0]}$$

Solução (a):

Teste da invariância temporal:

$$y[n]\big|_{n-n_0} = x[n-n_0]^2$$
$$y[n]\big|_{x[n-n_0]} = x[n-n_0]^2$$

Portanto, o sistema é invariante no tempo.

Solução (b):

Teste da invariância temporal:

$$y(t)\big|_{t-t_0} = x(2(t-t_0))$$
$$y(t)\big|_{x(t-t_0)} = x(2t-t_0)$$

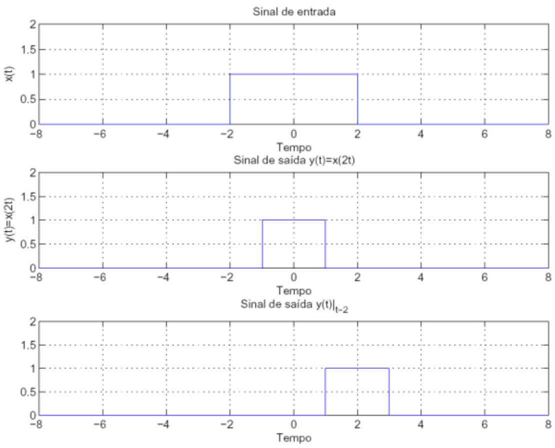
Portanto, o sistema é variante no tempo.

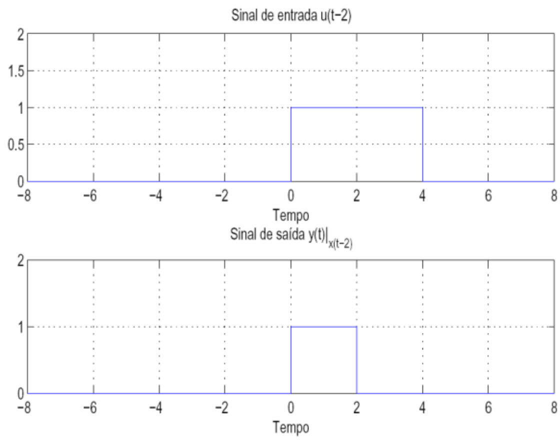
Obs.: Repare que no caso $y(t)\big|_{x(t-t_0)}$, substitui-se t por *t* no sinal $x(.)$ e, depois, adiciona-se o atraso t_0.

Supondo $t_0 = 2$ e $x(t) = \begin{cases} 1 & -2 \le t \le 2 \\ 0 & \textit{caso contrário} \end{cases}$.

$y(t)\big|_{t-t_0} = x(2t-4)$. Para os pontos -2 e 2, tem-se: $\begin{cases} 2t-4=-2 & \rightarrow 2t=2 \rightarrow t=1 \\ 2t-4=2 & \rightarrow 2t=6 \rightarrow t=3 \end{cases}$

$y(t)\big|_{x(t-t_0)} = x(2t-2)$. Para os pontos -2 e 2, tem-se: $\begin{cases} 2t-2=-2 & \rightarrow 2t=0 \rightarrow t=0 \\ 2t-2=2 & \rightarrow 2t=4 \rightarrow t=2 \end{cases}$





Solução (c):

Teste da invariância temporal:

$$y(t)\big|_{t-t_0} = x((t-t_0)/3)$$
$$y(t)\big|_{x(t-t_0)} = x\left(\frac{t}{3} - t_0\right)$$

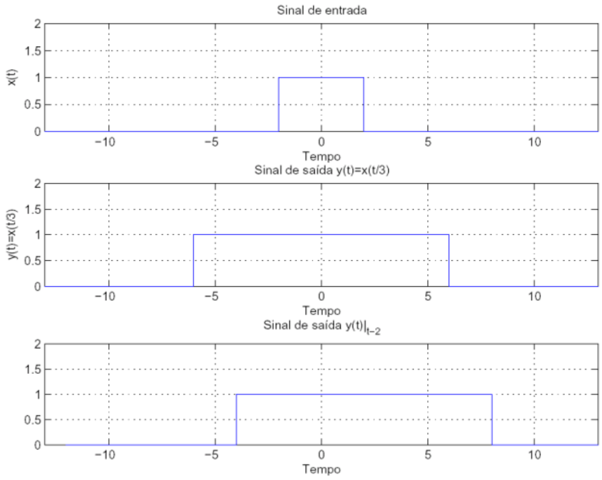
Portanto, o sistema é variante no tempo.

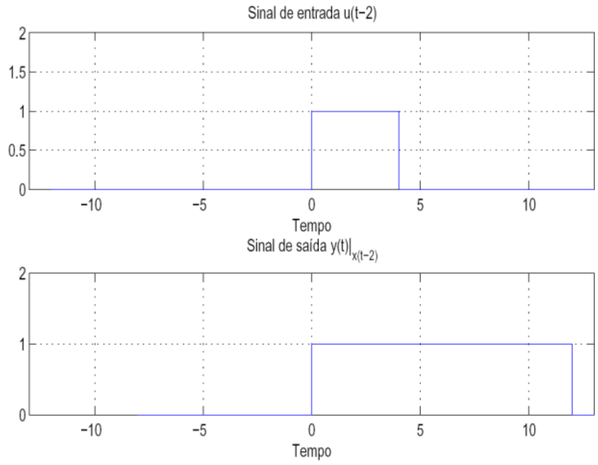
Obs.: Repare que no caso $y(t)\big|_{x(t-t_0)}$, substitui-se *t* por *t* no sinal $x(.)$, e, depois, adiciona-se o atraso t_0.

Supondo $t_0 = 2$ e $x(t) = \begin{cases} 1 & -2 \le t \le 2 \\ 0 & \textit{caso contrário} \end{cases}$:

$$y(t)\big|_{t-t_0} = x\left(\frac{t}{3} - \frac{2}{3}\right)$$

$$y(t)\big|_{x(t-t_0)} = x\left(\frac{t}{3} - 2\right)$$





Solução (d):

Teste da invariância temporal:

$$y(t)\big|_{t-t_0} = x(2 - t + t_0)$$

$$y(t)\big|_{x(t-t_0)} = x(2 - t - t_0)$$

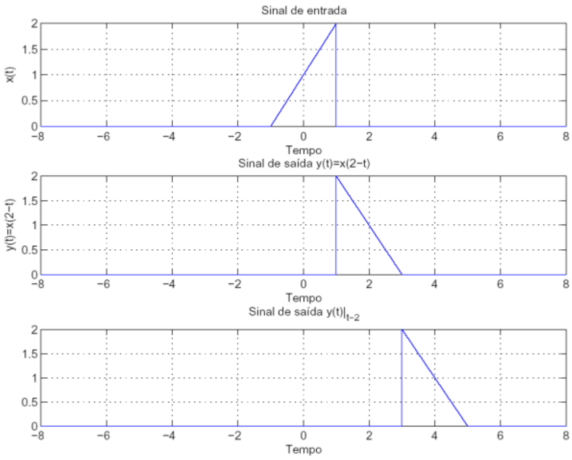
Portanto, o sistema é variante no tempo.

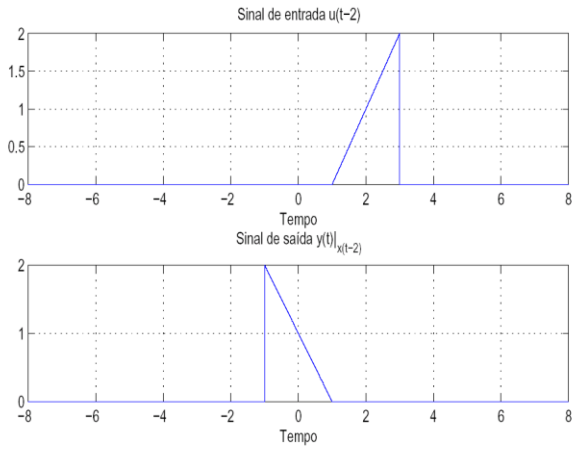
Obs.: Repare que no caso $y(t)\big|_{x(t-t_0)}$, substitui-se *t* por *t* no sinal $x(.)$, e, depois, adiciona-se o atraso t_0.

Supondo $t_0 = 2$ e $x(t) = \begin{cases} t+1 & \text{-}1 \le t \le 1 \\ 0 & \textit{caso contrário} \end{cases}$:

$$y(t)\big|_{t-t_0} = x(2 - t + 2) = x(-t + 4)$$

$$y(t)\big|_{t-t_0} = x(2 - t - 2) = x(t)$$





Solução (e):

Teste da invariância temporal:

$$y[n]\big|_{n-n_0} = x[-n+n_0]$$
$$y[n]\big|_{n-n_0} = x[-n-n_0]$$

Portanto, o sistema é variante no tempo.

Solução (f):

Teste da invariância temporal:

$$y(t)\big|_{t-t_0} = \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\tau)d\tau$$

$$y(t)\big|_{x(t-t_0)} = \int_{-\infty}^{t_0} x(\tau - t_0)d\tau$$

Mudança de variável: $\tau' = \tau - t_0 \Rightarrow d\tau' = d\tau$; $\tau \to -\infty \Rightarrow \tau' \to -\infty$; $\tau \to t \Rightarrow \tau' \to t - t_0$. Assim:

$$y(t)\big|_{x(t-t_0)} = \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\tau')d\tau'$$

Portanto, o sistema é invariante no tempo.

Exemplo 4: Determine se os sistemas abaixo são lineares:

(a) $y[n] = x[n]^2$ **(b)** $y(t) = \sin(2\pi x(2t))$ **(c)** $y[n] = \frac{1}{11}\sum_{k=-5}^{5} x[n+k]$

Solução (a):

Princípio da Superposição: $y_1[n] = x_1[n]^2$; $y_2[n] = x_2[n]^2$

$$y[n] = y_1[n] + y_2[n] = x_1[n]^2 + x_2[n]^2$$

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n]$$

$$y[n] = (x_1[n] + x_2[n])^2 = x_1[n]^2 + x_2[n]^2 + 2x_1[n]x_2[n] \neq y_1[n] + y_2[n]$$

Portanto, o sistema é não-linear.

Solução (b):

Princípio da Superposição: $y_1(t) = \sin(2\pi x_1(t))$; $y_2(t) = \sin(2\pi x_2(t))$

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = \sin(2\pi x_1(t)) + \sin(2\pi x_2(t))$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \sin(2\pi(x_1(t) + x_2(t))) \\ &= \sin(2\pi x_1(t))\cos(2\pi x_2(t)) + \sin(2\pi x_2(t))\cos(2\pi x_1(t)) \\ &\neq y_1(t) + y_2(t) \end{aligned}$$

Portanto, o sistema é não-linear.

Solução (c):

Princípio da Superposição: $y_1[n] = \frac{1}{11}\sum_{k=-5}^{5} x_1[n+k]$; $y_2[n] = \frac{1}{11}\sum_{k=-5}^{5} x_2[n+k]$

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n]$$

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{11}\sum_{k=-5}^{5}(x_1[n+k] + x_2[n+k]) \\ &= \frac{1}{11}(\sum_{k=-5}^{5} x_1[n+k] + \sum_{k=-5}^{5} x_2[n+k]) \\ &= \frac{1}{11}\sum_{k=-5}^{5} x_1[n+k] + \frac{1}{11}\sum_{k=-5}^{5} x_2[n+k] \\ &= y_1[n] + y_2[n] \end{aligned}$$

Portanto, o sistema é linear.