

Sinais e Sistemas

Sistemas Lineares Invariantes no Tempo

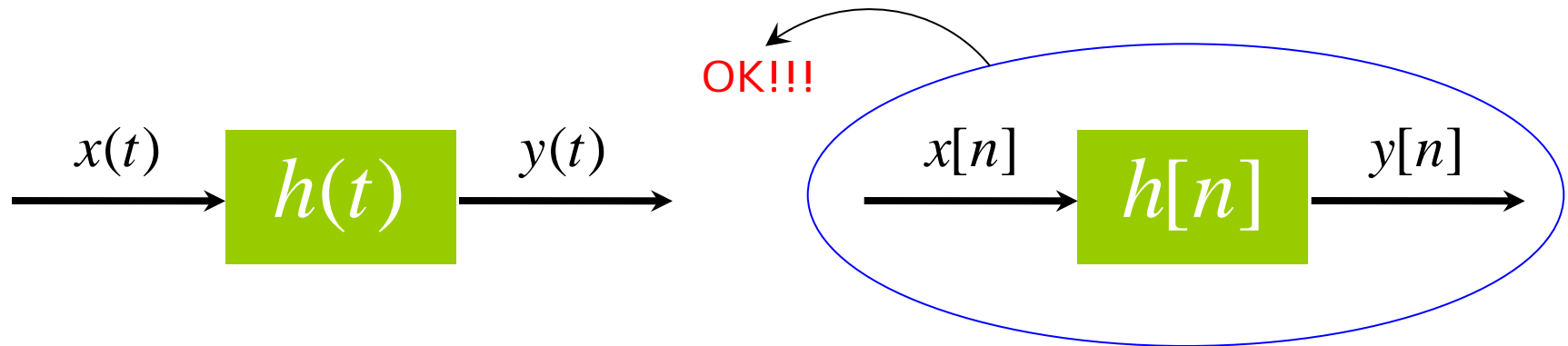
Renato Dourado Maia

Universidade Estadual de Montes Claros

Engenharia de Sistemas



Lembrando...



$h(t), h[n]$ \longrightarrow Resposta do sistema quando a entrada é um impulso unitário, $\delta(t), \delta[n]$.

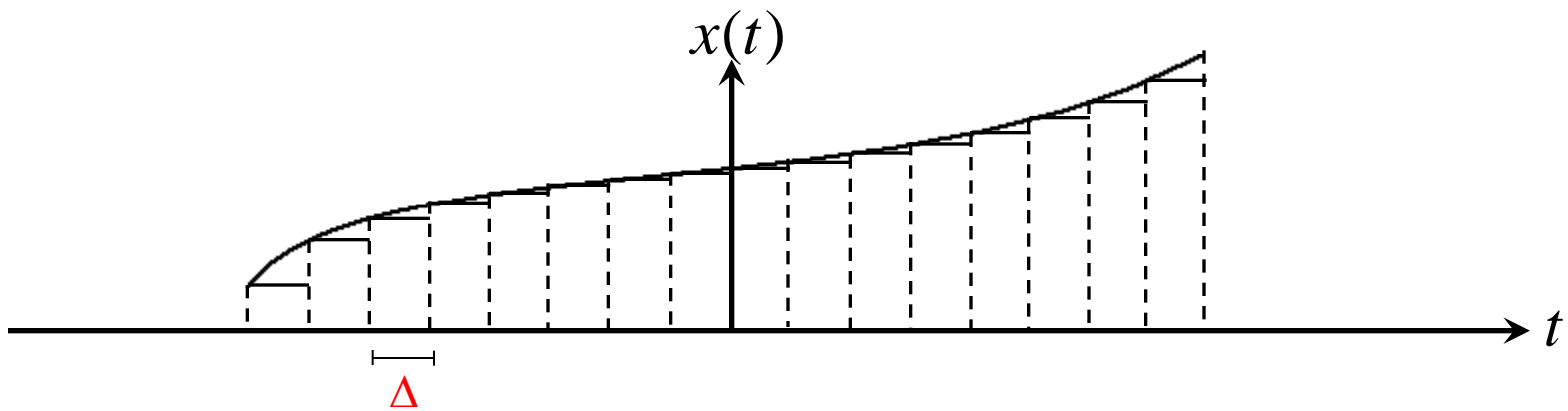
A **Resposta ao Impulso** caracteriza um sistema LTI: dada uma entrada x , pode-se, conhecendo-se h , determinar-se y . Esse método é denominado **Convolução**.

AGORA VEREMOS O CASO CONTÍNUO!!!

Consideração Importante

- Estudaremos o caso contínuo mais **rapidamente**, pois todo o raciocínio é **análogo** àquele desenvolvido para o caso discreto:
 - Inicialmente, será mostrado que sinais contínuos **podem ser escritos em termos de impulsos**.
 - Em seguida, essa **forma alternativa** de representar sinais contínuos será utilizada para se determinar a saída de sistemas contínuos lineares invariantes no tempo.
 - Será demonstrado que, tal como no caso discreto, **a resposta ao impulso caracteriza por completo um sistema LTI contínuo**.

Sinais Contínuos e Soma Impulsos



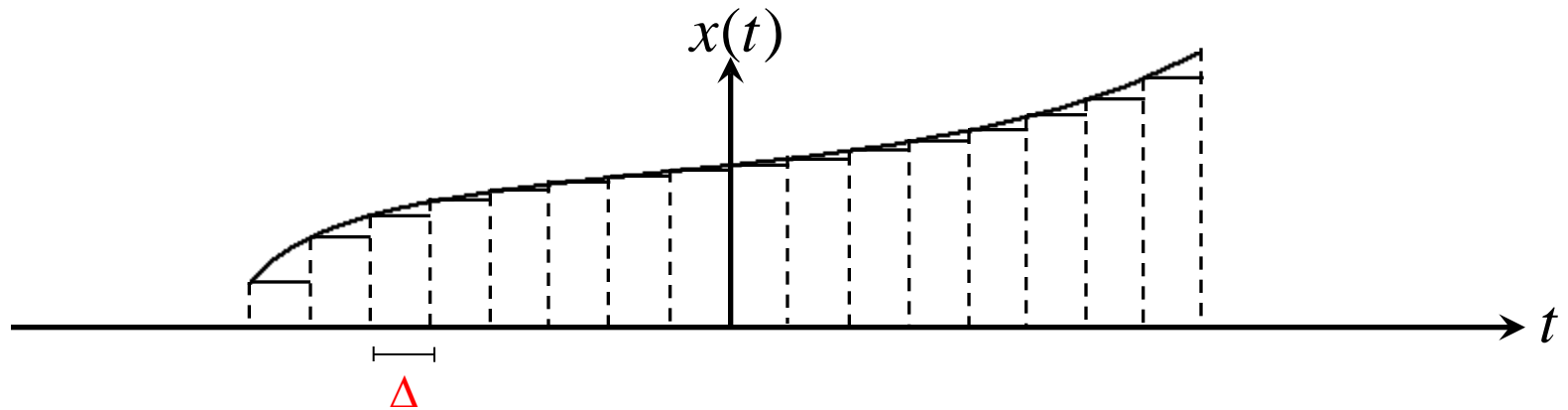
Vamos escrever o sinal $x(t)$ como uma combinação linear de pulsos de largura Δ ?

$$\delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} 1/\Delta, & 0 \leq t \leq \Delta \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\rightarrow \Delta \delta_{\Delta}(t) = 1$$

Amplitude Unitária

Sinais Contínuos e Soma Impulsos



$$\delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} 1/\Delta, & 0 \leq t \leq \Delta \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \rightarrow \Delta \delta_{\Delta}(t) = 1$$

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \Delta \longrightarrow \text{Quanto menor o } \Delta, \text{ melhor é a aproximação. Concordam?}$$

O que acontece quando $\Delta \rightarrow 0$?

Sinais Contínuos e Soma Impulsos

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \Delta \longrightarrow \text{O que acontece quando } \Delta \rightarrow 0?$$

Impulso Deslocado

$$x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \Delta = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

Peso

$x(t)$ é uma “soma” de impulsos ponderados e deslocados!

Lembremos do Caso Discreto...

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

Somatório de Convolução

Considerando a **LINEARIDADE** e a **INVARIÂNCIA NO TEMPO**, tem-se, analogamente, para o caso contínuo:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Integral de Convolução

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

Integral de Convolução

$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau$ \longrightarrow Entrada escrita como “soma” de impulsos ponderados e deslocados...



**LINEARIDADE e
INVARIÂNCIA NO TEMPO**

A saída é uma “soma” ponderada das saídas devidas a cada entrada, ou seja, um somatório de respostas ao impulso deslocadas e ponderadas!!!

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

Integral de Convolução – Resumo

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow h(t) \quad \longrightarrow \text{Definição de } h(t)$$

$$\delta(t - \tau) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow h(t - \tau) \quad \longrightarrow \text{Invariância no Tempo}$$

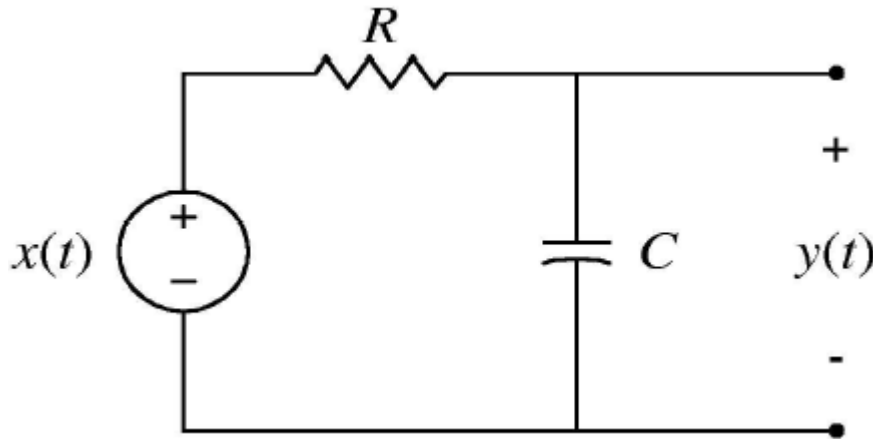
$$x(\tau)\delta(t - \tau) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow x(\tau)h(t - \tau) \quad \longrightarrow \text{Linearidade}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad \longrightarrow \text{Linearidade}$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad \longrightarrow \text{Definição de } \delta(t)$$

Integral de Convolução

Exemplo



Resposta ao Impulso?

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} u(t)$$

Consideremos três entradas:

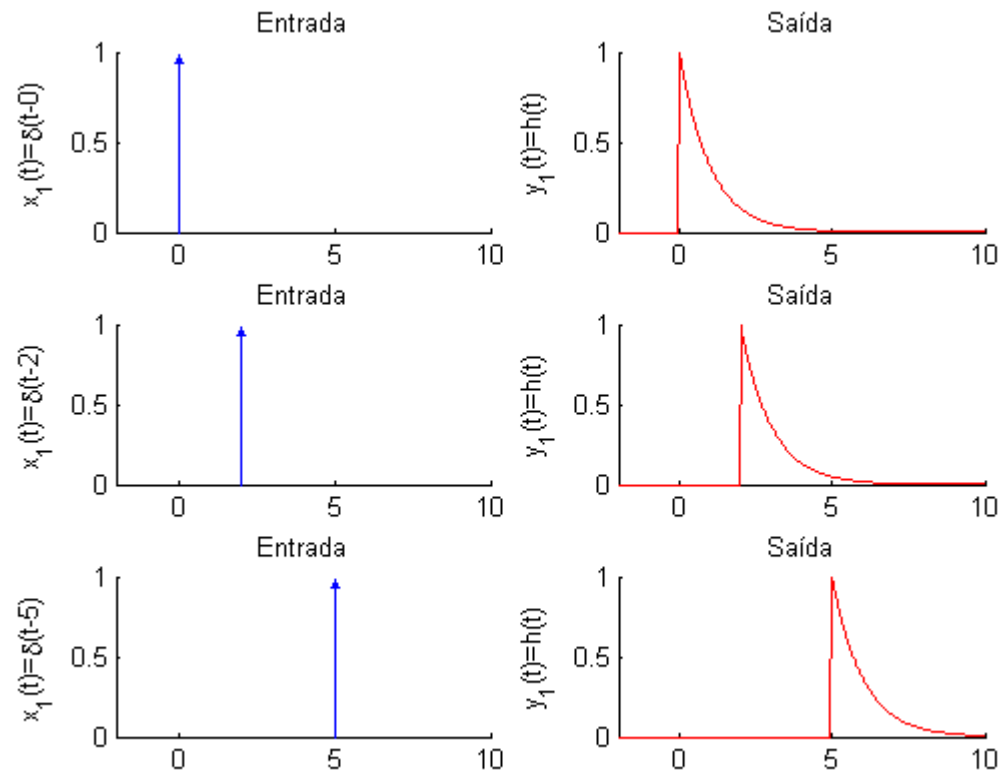
$$x_1(t) = \delta(t) \rightarrow y_1(t) = h(t)$$

$$x_2(t) = \delta(t - 2) \rightarrow y_2(t) = h(t - 2)$$

$$x_3(t) = \delta(t - 5) \rightarrow y_3(t) = h(t - 5)$$

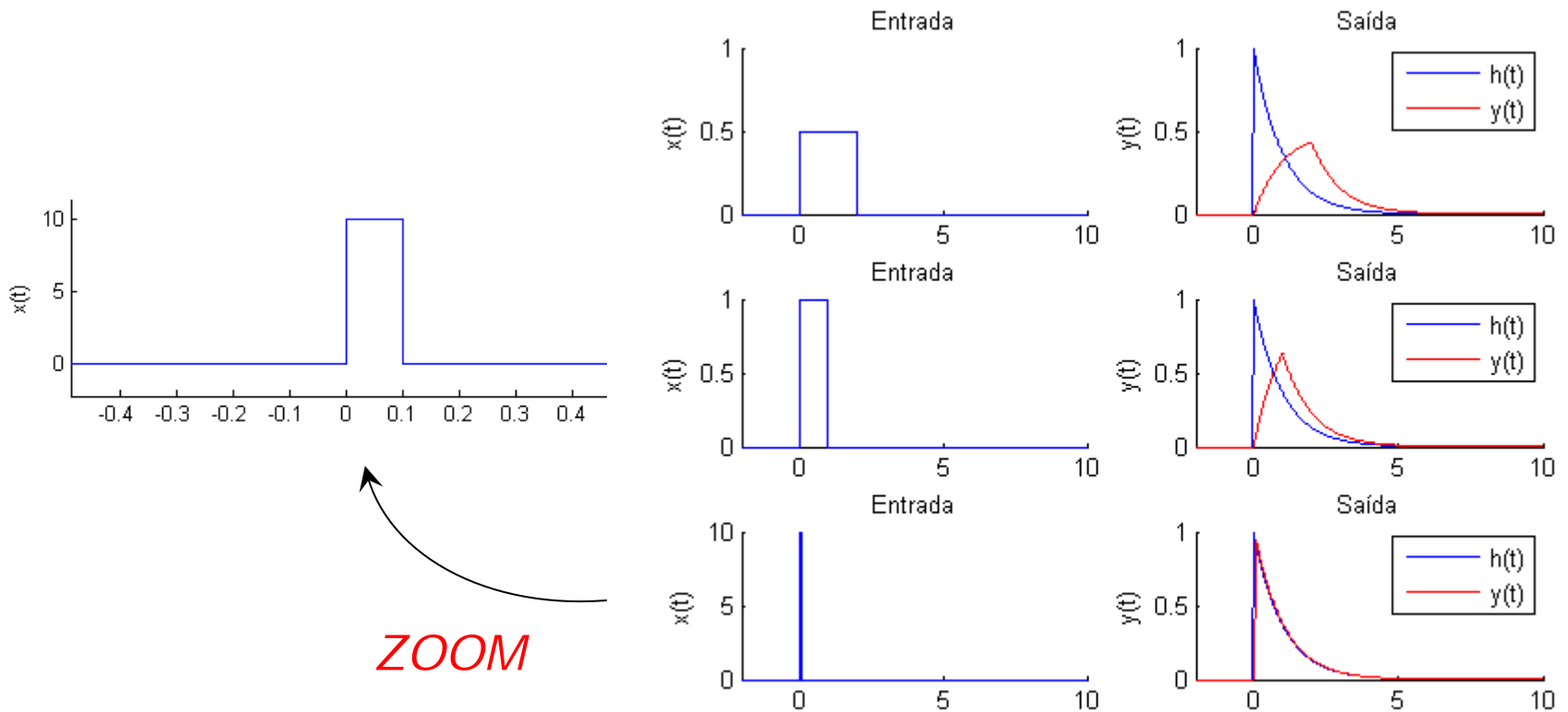
Integral de Convolução

Exemplo: Resposta ao Impulso do Circuito RC ($RC = 1$)



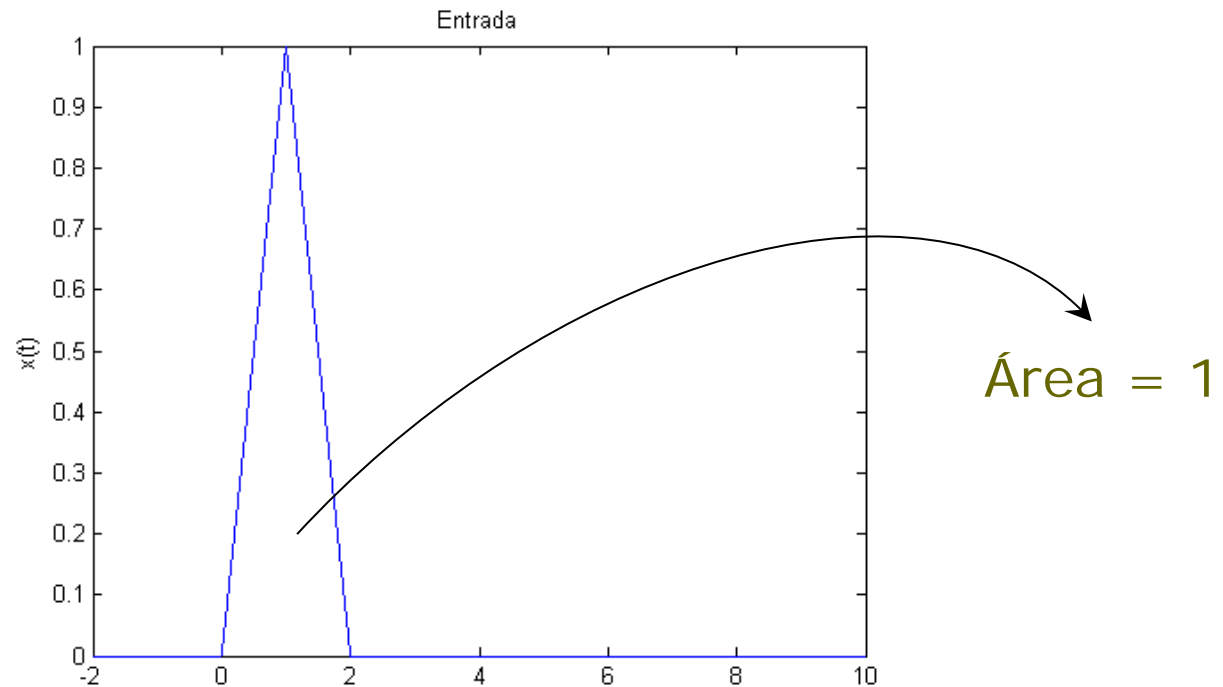
Integral de Convolução

Exemplo: Pulso como Aproximação do Impulso ($RC = 1$)



Integral de Convolução

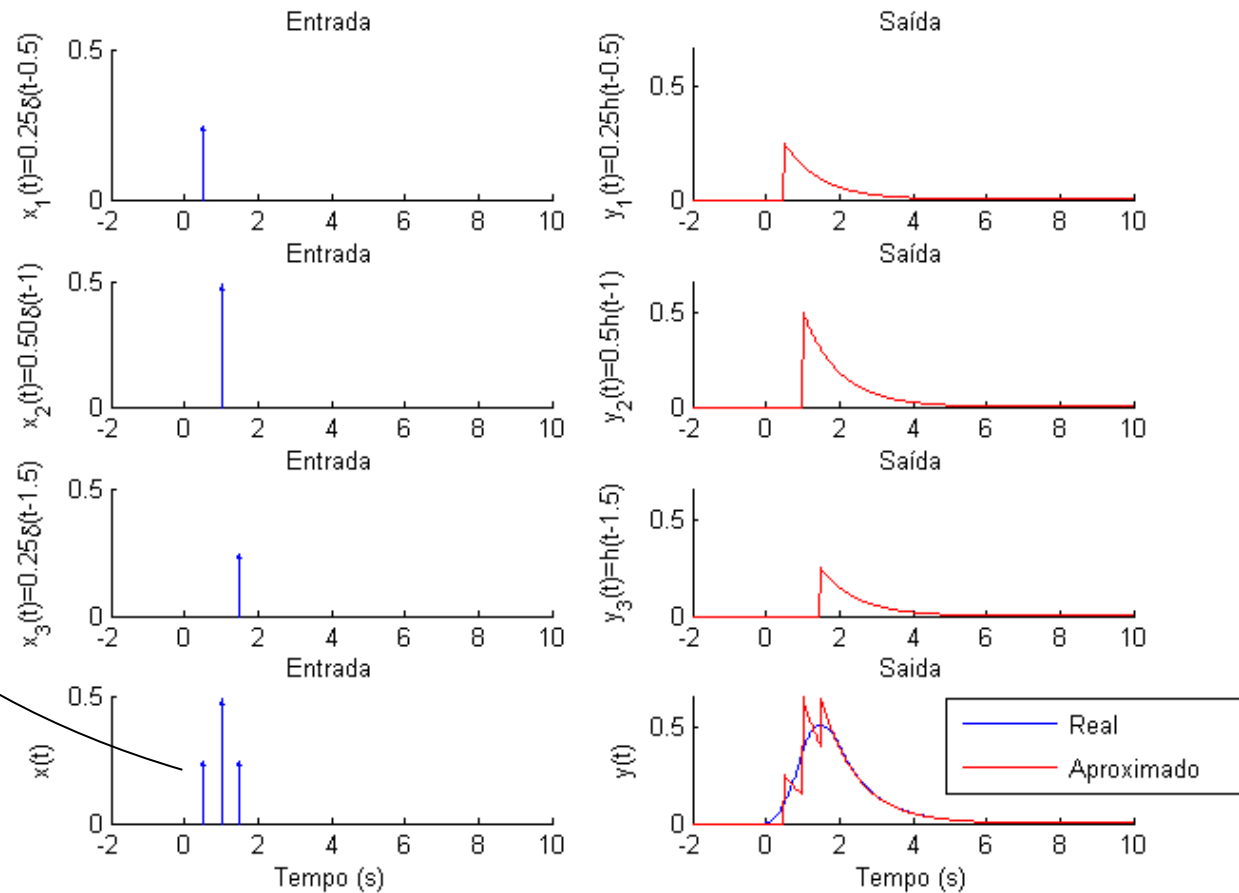
Exemplo: Entrada para o Circuito RC ($RC = 1$)



Vamos determinar a saída interpretando a entrada como uma "soma" de impulsos ponderados e deslocados?

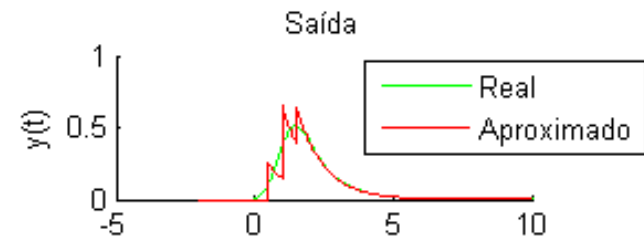
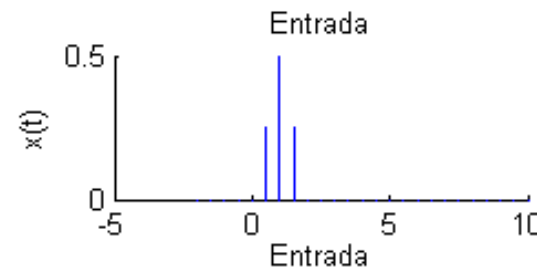
Integral de Convolução

Área = 1

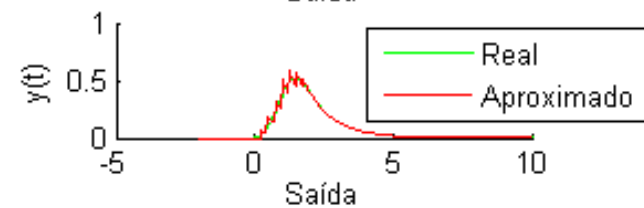
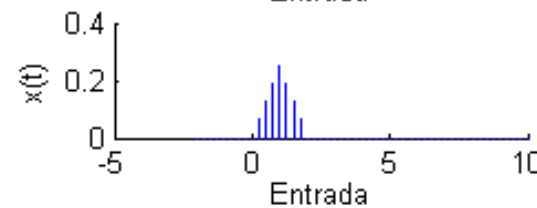


Integral de Convolução

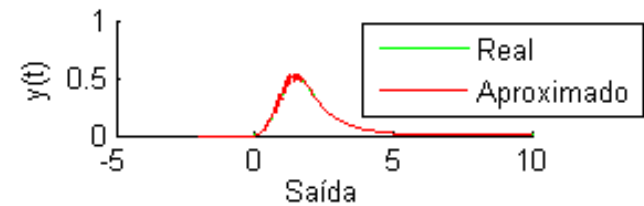
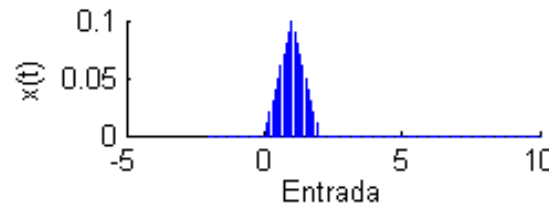
3 impulsos



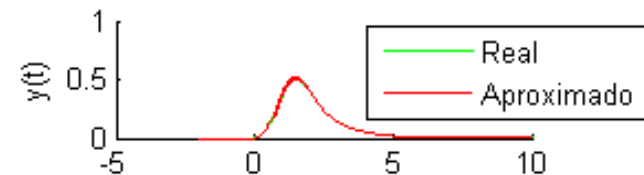
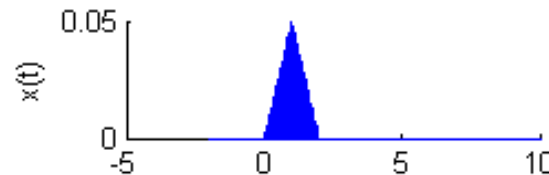
7 impulsos



19 impulsos

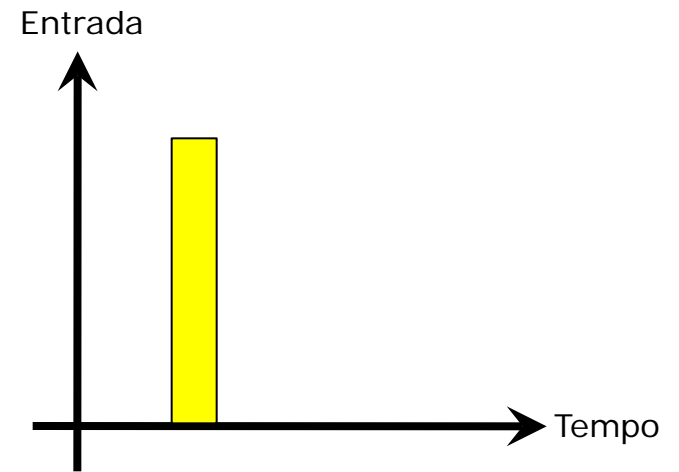
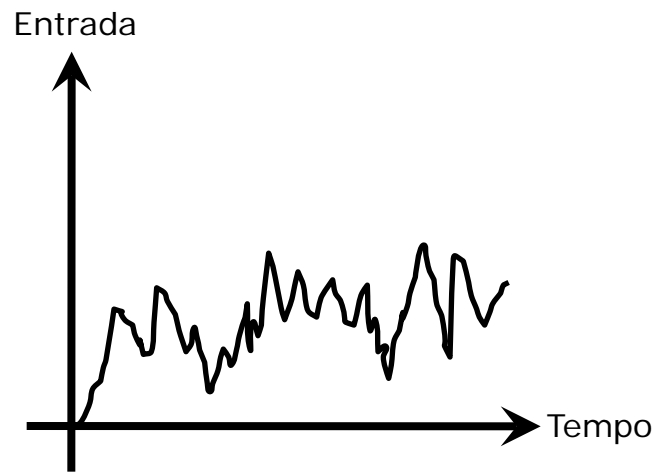


39 impulsos



A entrada foi sempre mantida com a área igual a 1!

Lembrando...



Rebate, Desloca, Multiplica e...

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n] \quad \longrightarrow \quad \text{Somatório de Convolução}$$

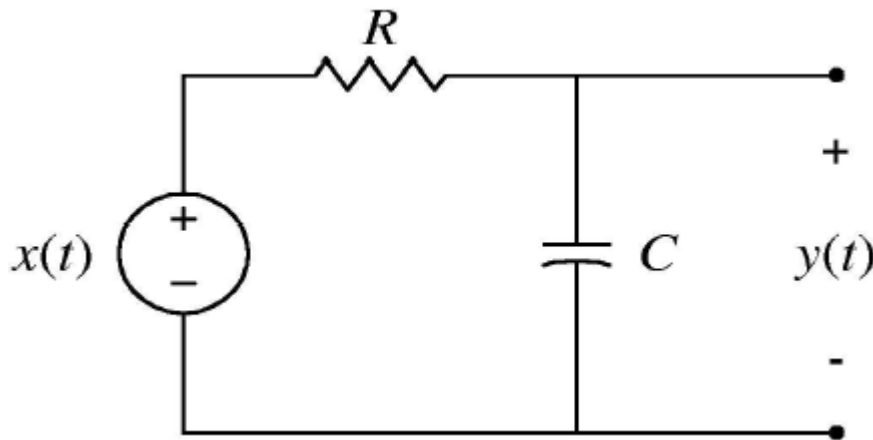
Rebate, desloca, multiplica e soma!

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t) = h(t) * x(t) \quad \longrightarrow \quad \text{Integral de Convolução}$$

Rebate, desloca, multiplica e integra!

Integral de Convolução

Exemplo



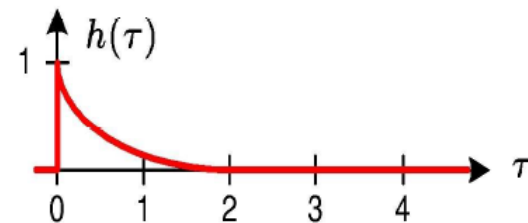
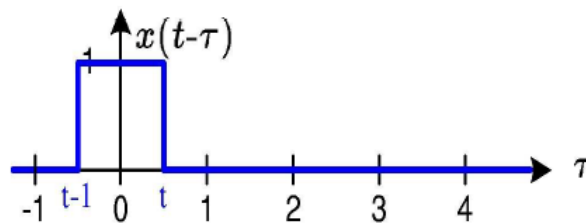
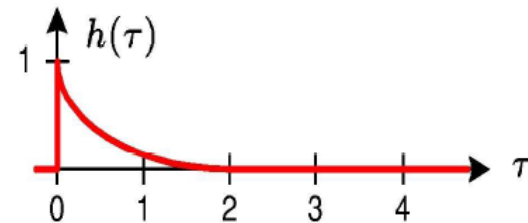
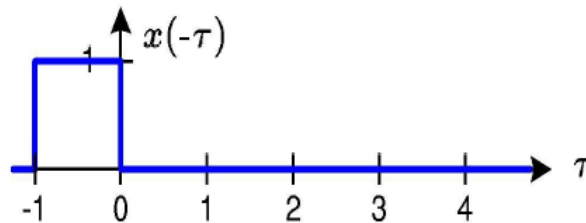
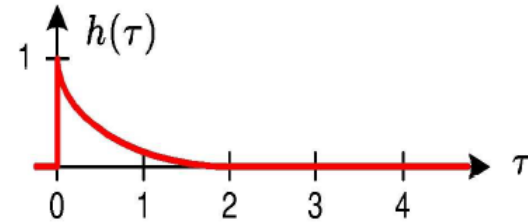
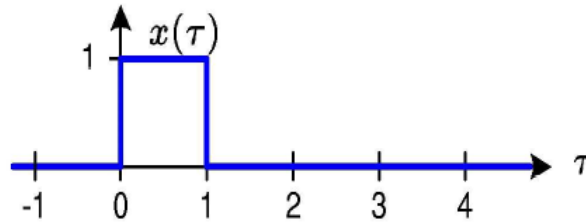
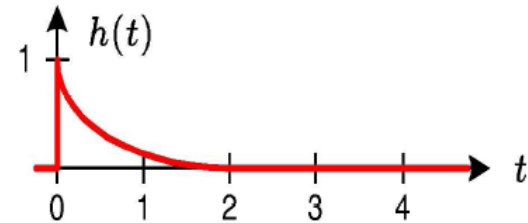
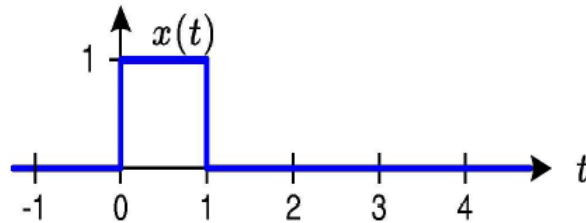
Resposta ao Impulso?

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} u(t)$$

Determinar a saída para a seguinte entrada:

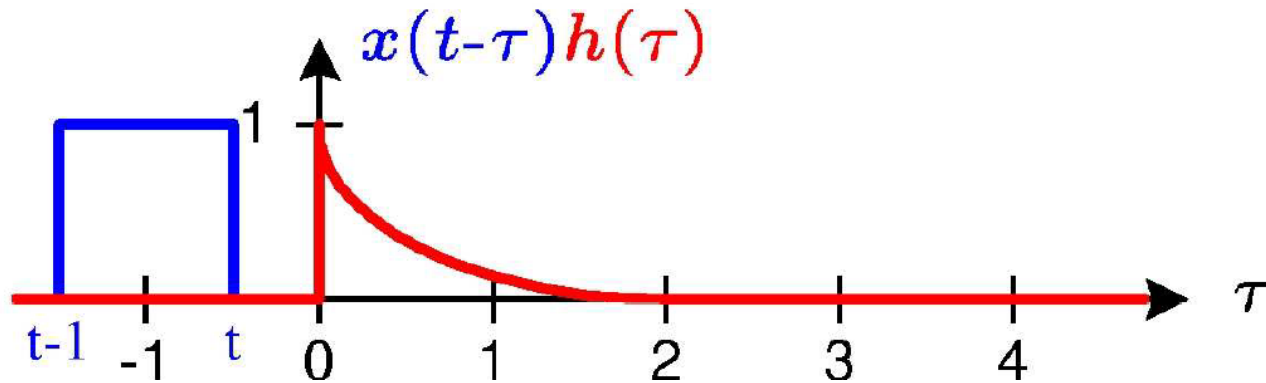
$$x(t) = u(t) - u(t - 1)$$

Integral de Convolução



Integral de Convolução

Exemplo: Primeiro Intervalo

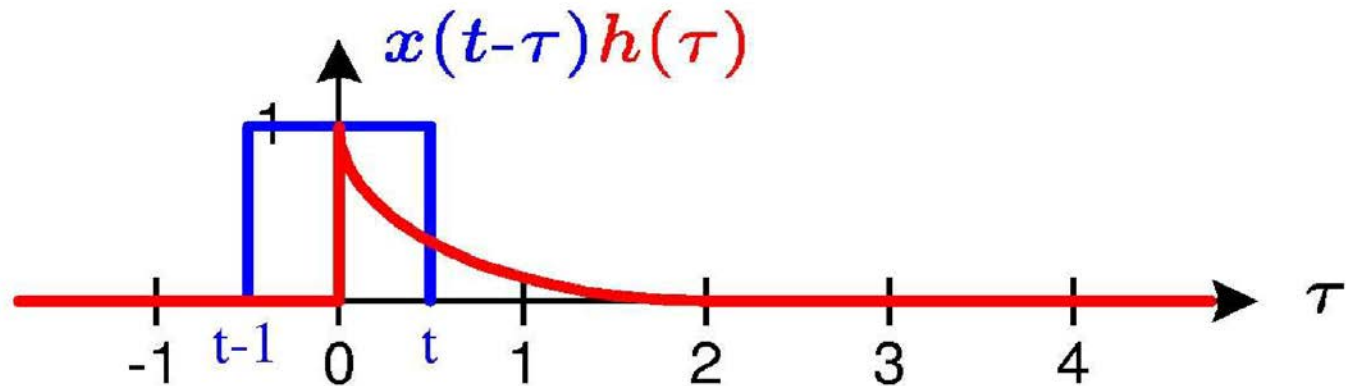


$$y(t) = 0, t < 0$$

A brincadeira começa em $t = 0...$

Integral de Convolução

Exemplo: Segundo Intervalo



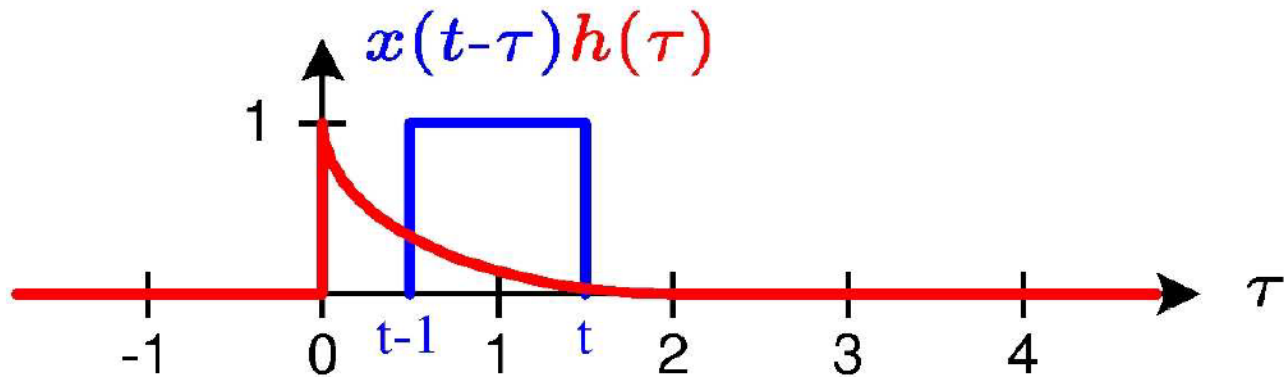
$$y(t) = \int_0^t 1e^{-\tau} d\tau, \quad 0 \leq t \leq 1$$

An arrow points from the interval $0 \leq t \leq 1$ to a blue question mark icon.

$$y(t) = 1 - e^{-t}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

Integral de Convolução

Exemplo: Terceiro Intervalo



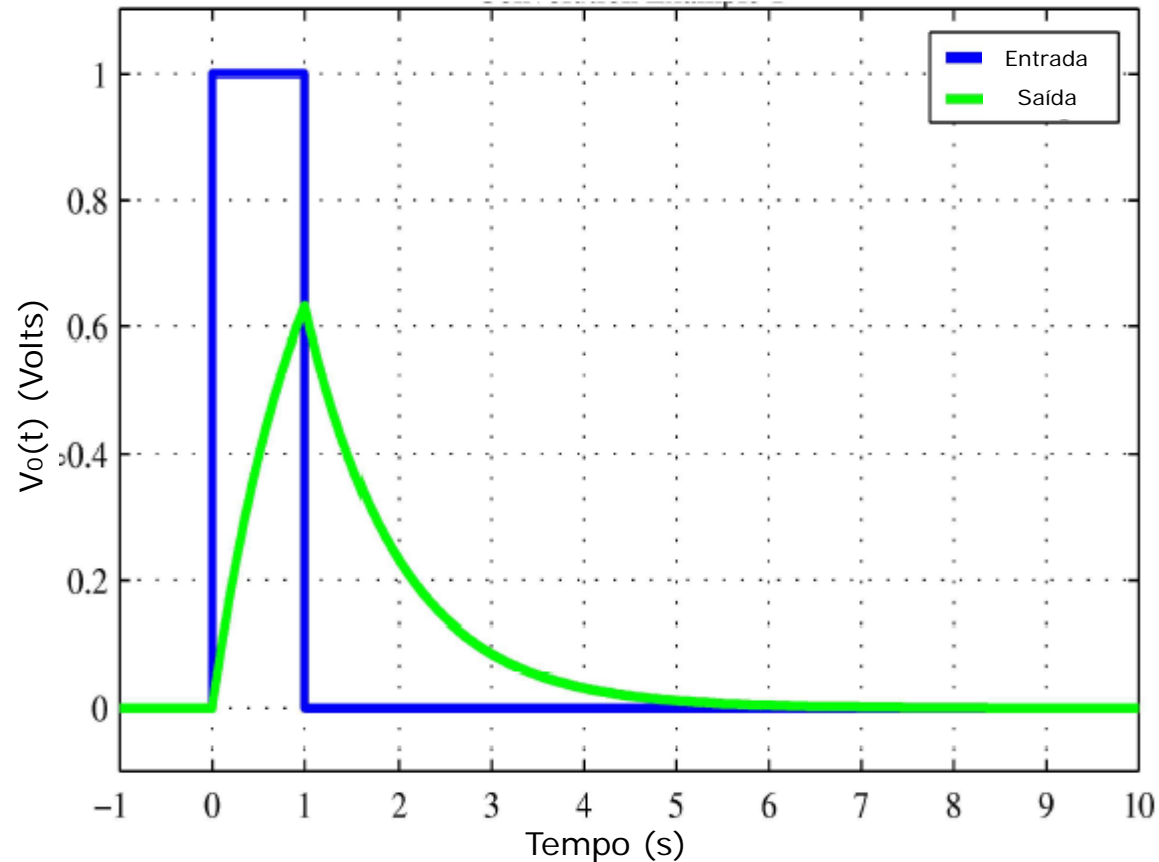
$$y(t) = \int_{t-1}^t 1e^{-\tau} d\tau, \quad 1 \leq t \leq \infty$$

The expression $1 \leq t \leq \infty$ is circled in blue. An arrow points from this circle to a blue question mark icon.

$$y(t) = e^{-t+1} - e^{-t}, \quad 1 \leq t \leq \infty$$

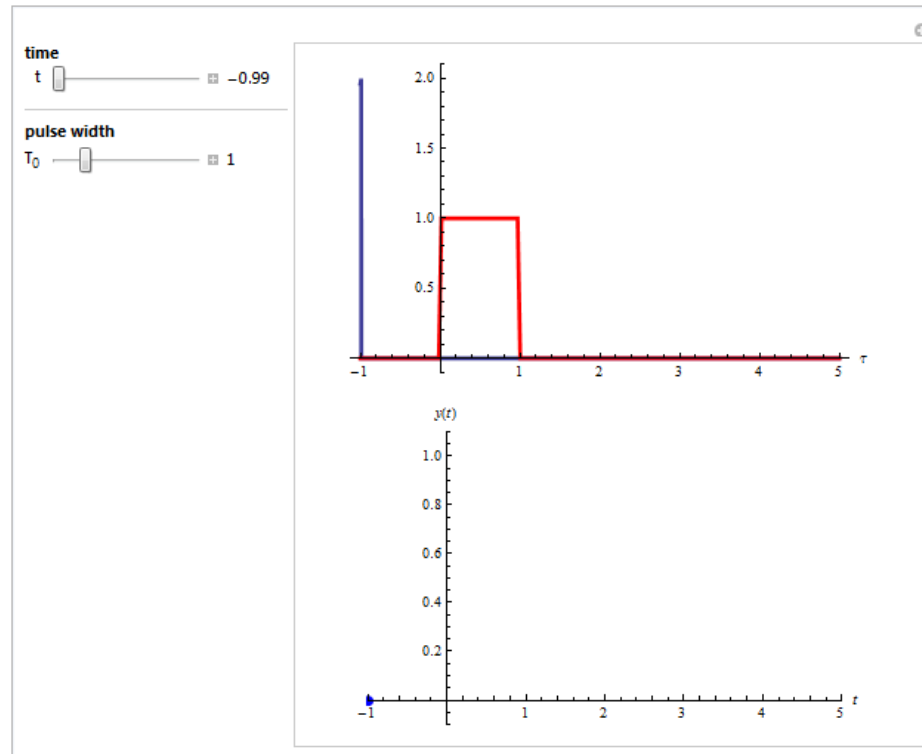
Integral de Convolução

Exemplo: Resultado



Integral de Convolução

Convolution with a Rectangular Pulse



"Convolution Sum" from the Wolfram Demonstrations Project

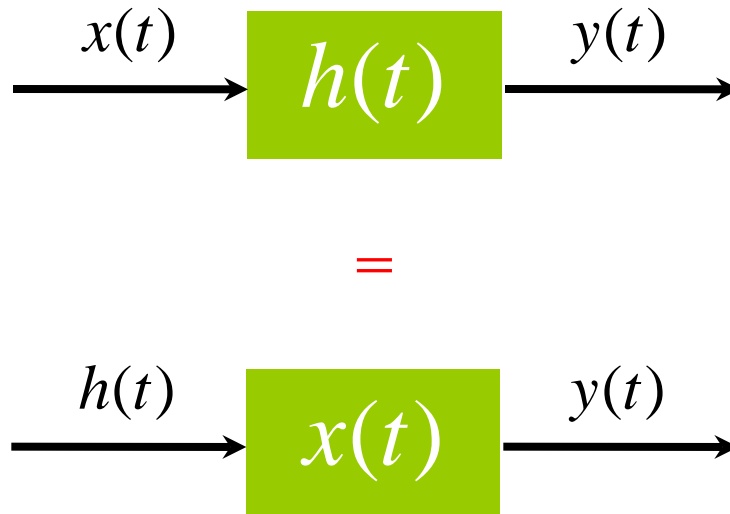
<http://demonstrations.wolfram.com/ConvolutionWithARectangularPulse/>

Integral de Convolução

Vamos brincar um pouco com uma animação em Java que ilustra a interpretação rebate, desloca, multiplica e integra...

Propriedades da Convolução

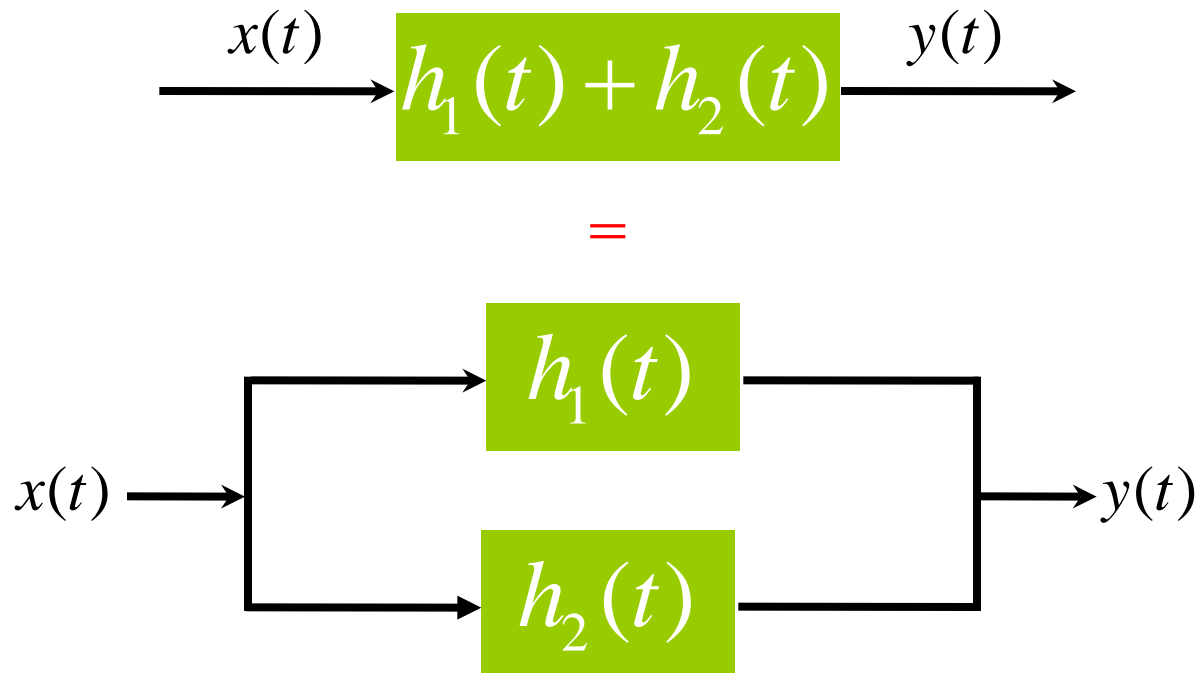
- Comutativa: $x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$



Podemos escolher qual sinal será rebatido...
O caso discreto é análogo...

Propriedades da Convolução

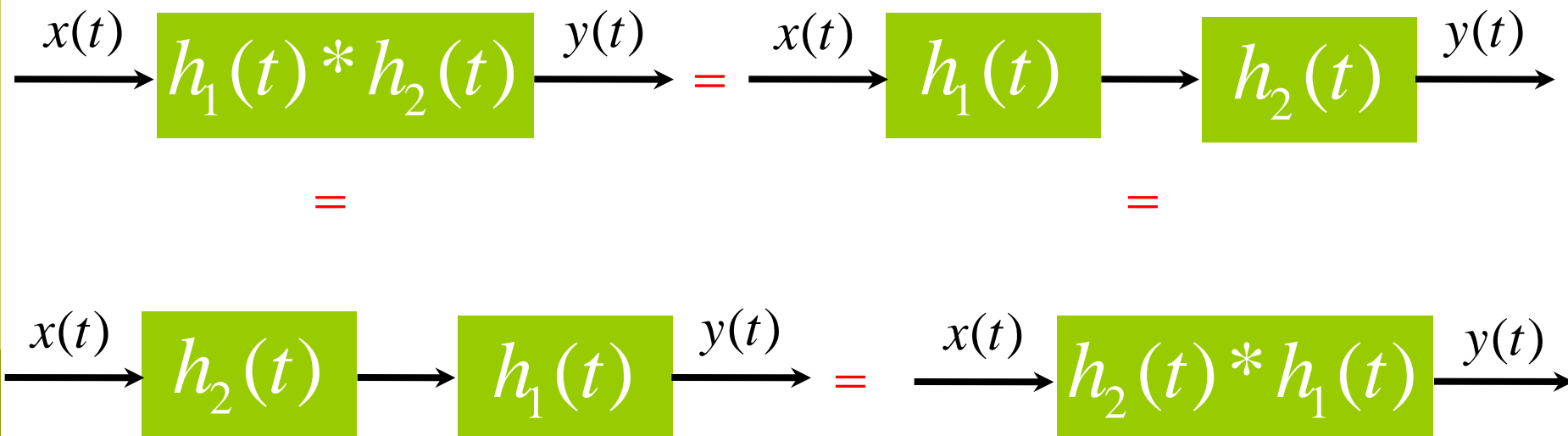
- Distributiva: $x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$



Conexão Paralela de Sistemas... O caso discreto é análogo...

Propriedades da Convolução

- Associativa: $(x(t) * h_1(t)) * h_2(t) = x(t) * (h_1(t) * h_2(t))$



Conexão em Série (Cascata) de Sistemas... O caso discreto é análogo...

Propriedades da Convolução

□ Memória:

- Num sistema sem memória, a saída num determinado instante **depende apenas da entrada nesse mesmo instante**:

$$h[n] = 0, n \neq 0$$

$$h[n] = k\delta[n], k = h[0]$$

Pelo Somatório de Convolução: $y[n] = kx[n]$

O caso contínuo é análogo...

Propriedades da Convolução

□ Causalidade:

- Sistemas causais são aqueles que dependem apenas do presente e/ou do passado:

$$h[n] = 0, n < 0 \quad \therefore \quad h(t) = 0, t < 0$$

A Integral e o Somatório de Convolução poderão ter os seus limites simplificados:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad \rightarrow \quad \int_0^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n - k] \quad \rightarrow \quad \sum_{k=0}^{+\infty} x[k]h[n - k]$$

Propriedades da Convolução

□ Estabilidade:

- Sistemas estáveis são aqueles que, para entradas limitadas, geram saídas limitadas. Então, considerando uma entrada limitada, para que um sistema seja estável, sua resposta ao impulso deve ser absolutamente integrável (somável):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty$$

Propriedades da Convolução

□ Invertibilidade:

- Sistemas invertíveis são aqueles em que a entrada pode ser recuperada a partir da saída, isto é, diferentes entradas levam a diferentes saídas:

$$x(t) * (h(t) * h^{-1}(t)) = x(t)$$

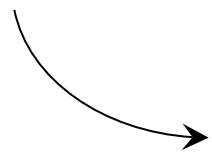
Para que a relação acima seja verdadeira, a seguinte condição deve ser obedecida:

$$h(t) * h^{-1}(t) = \delta(t)$$

O caso discreto é análogo...

Resposta ao Degrau

$$s[n] = u[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]u[n-k]$$



Resposta ao Degrau Unitário
de um sistema LTI discreto




$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^n h[k]$$

Facilmente, deduz-se a seguinte relação: $h[n] = s[n] - s[n-1]$

E O CASO CONTÍNUO?

Resposta ao Degrau

$$s(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$$


Resposta ao Degrau Unitário
de um sistema LTI contínuo

Tal como no caso discreto, há uma relação simples:

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = s'(t)$$

Conclusão: como a resposta ao impulso pode ser recuperada por meio da resposta ao degrau, a resposta ao degrau também caracteriza completamente um sistema LTI contínuo ou discreto.

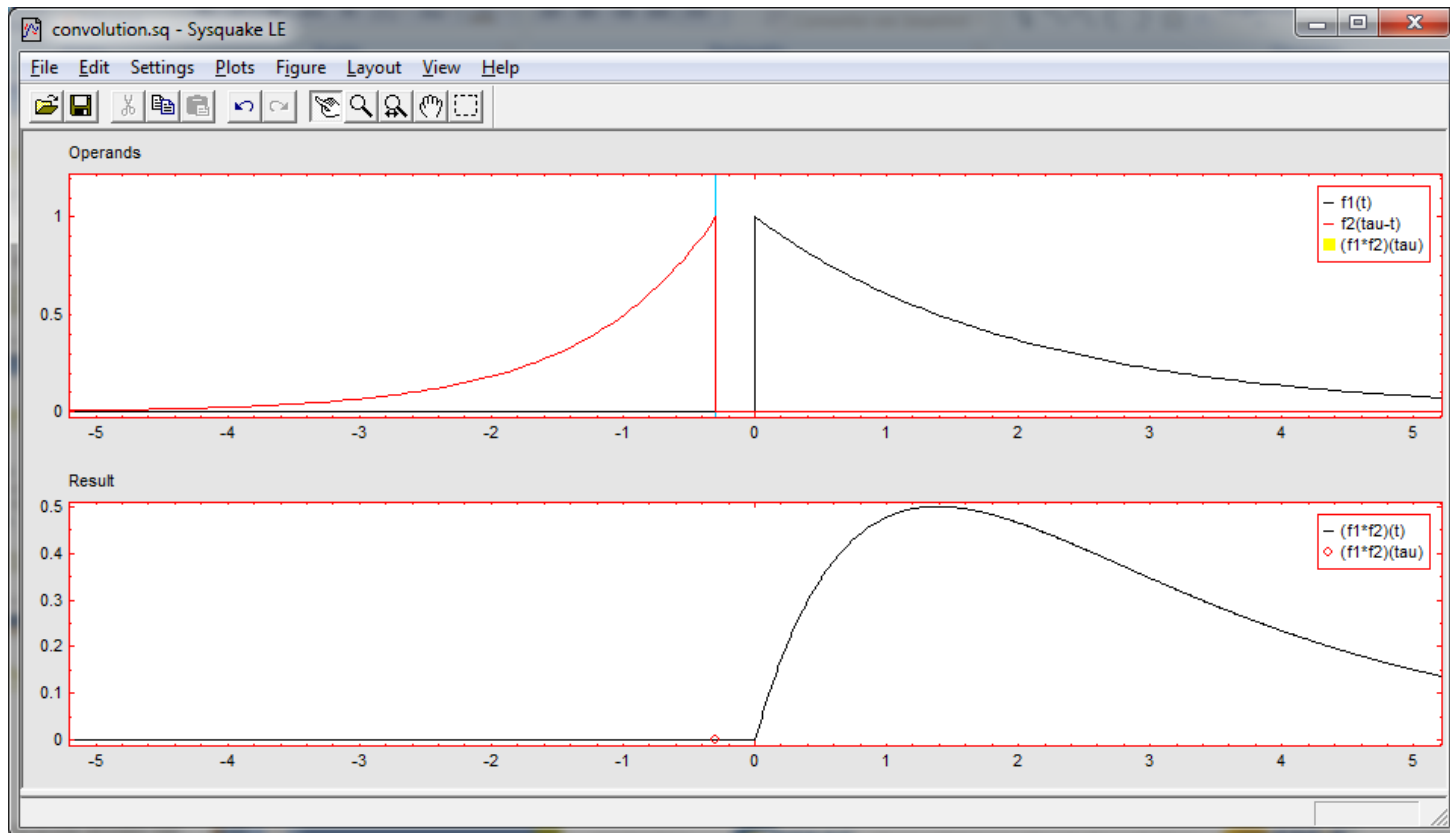
Integral de Convolução

Exemplo

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & 0 \leq t < 1 \\ 2, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & 2 \leq t \end{cases} \quad h(t) = \begin{cases} 0, & t < -1 \\ 1, & -1 \leq t < 1 \\ e^{-t}, & 1 \leq t < 3 \\ 0, & 3 \leq t \end{cases}$$

Iniciaremos a próxima aula com a análise desse exemplo! Não deixem de tentar resolvê-lo em casa!!!

Para Brincar ☺



[Exemplo disponível na página da disciplina \(Sysquake\)](#)

Educational Matlab GUIs

- Demos sobre Processamento de Sinais: Convolução, Série de Fourier, Transformadas, etc...

<http://users.ece.gatech.edu/mcclella/matlabGUIs/index.html>

(Acesso em 23/08/2011)

- Vamos brincar um pouco com a [Continuous Convolution Demo!](#) 😊