Sinais e Sistemas

Sistemas Lineares Invariantes no Tempo

Renato Dourado Maia

Universidade Estadual de Montes Claros

Engenharia de Sistemas

Somatório de Convolução

Exemplo

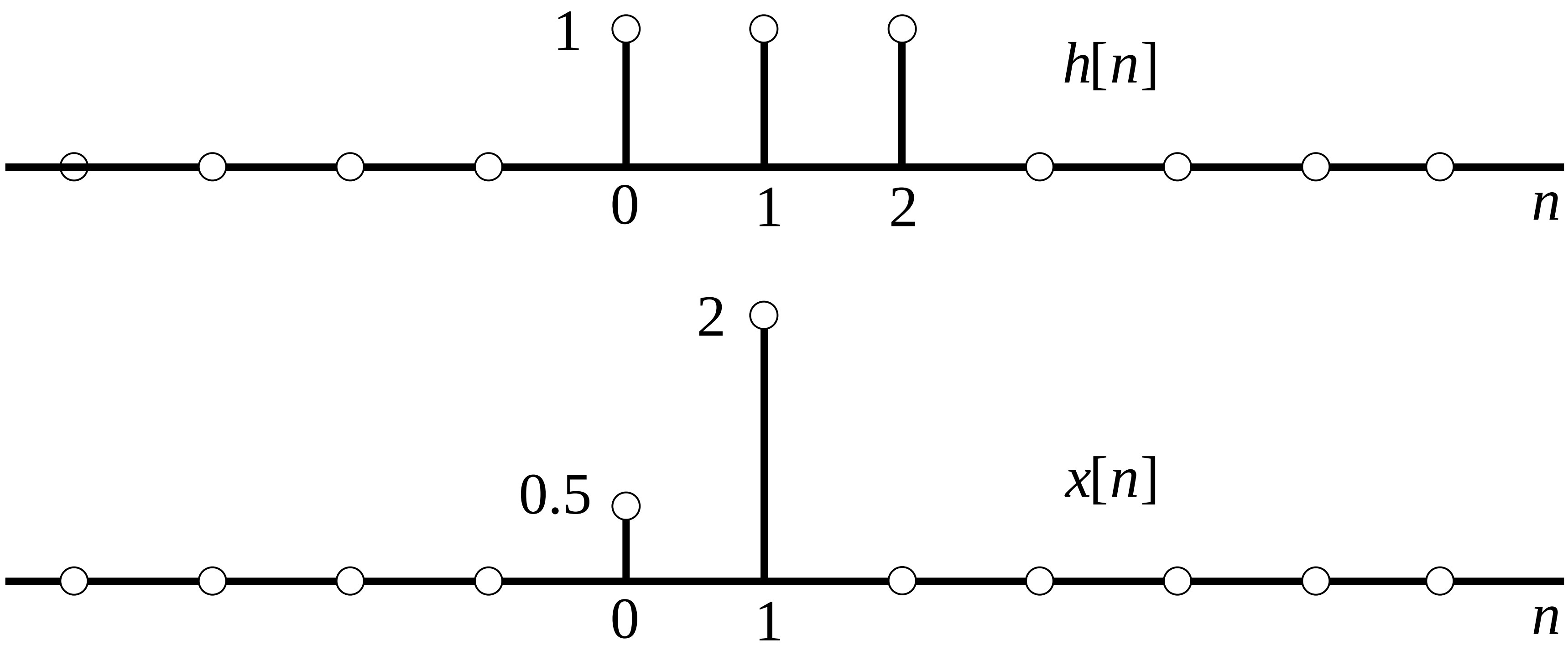
$$h[n] = \begin{cases} 1, & n = 0,1,2 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases} \qquad x[n] = \begin{cases} 0.5, & n = 0 \\ 2, & n = 1 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

Entrada como Soma de Impulsos: $x[n] = 0.5\delta[n] + 2\delta[n-1]$

Saída como Soma de Respostas ao Impulso Ponderadas e Deslocadas: $y[n] = 0.5h[n] + 2h[n-1]$

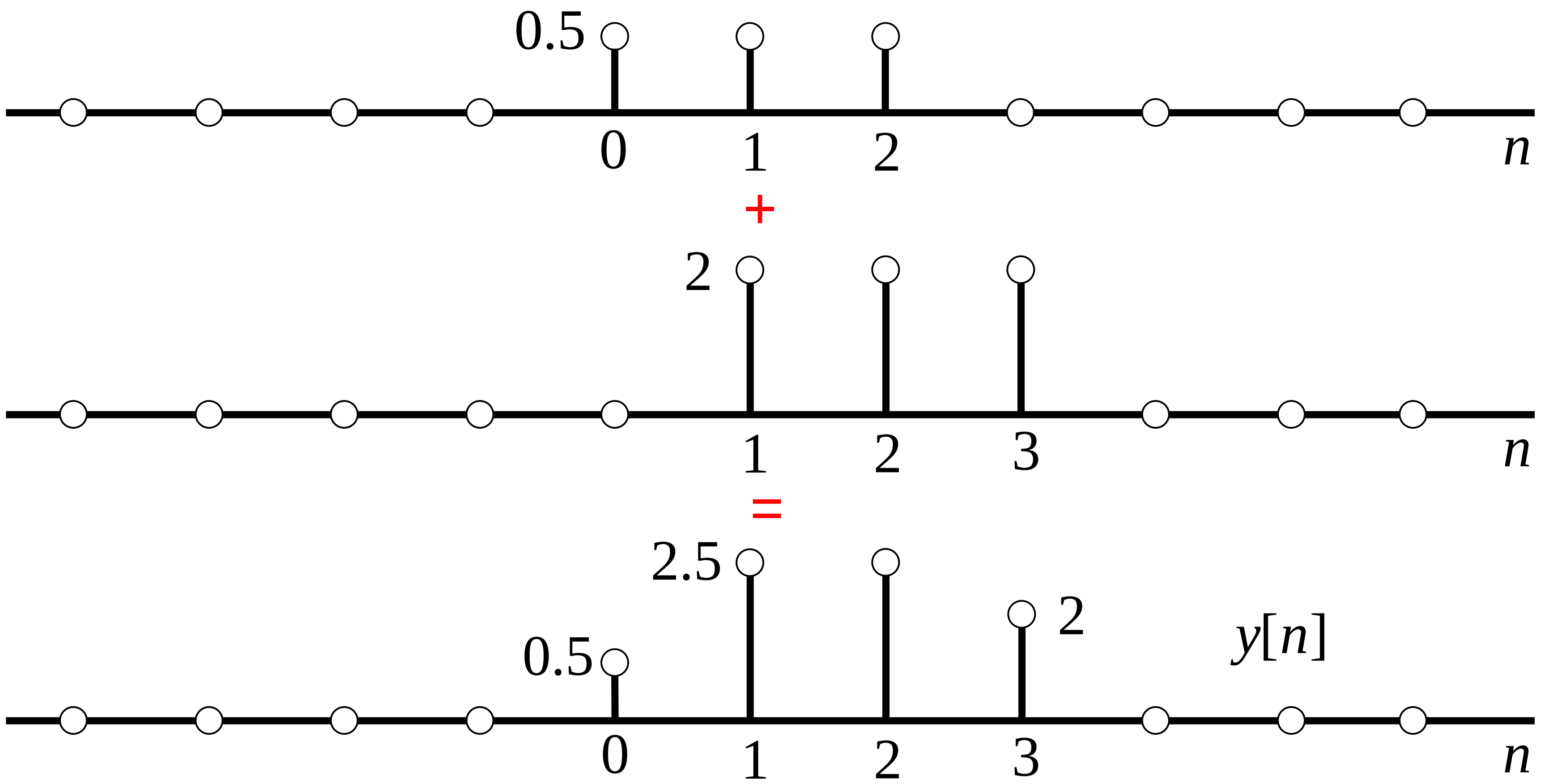
Somatório de Convolução

Desenhando



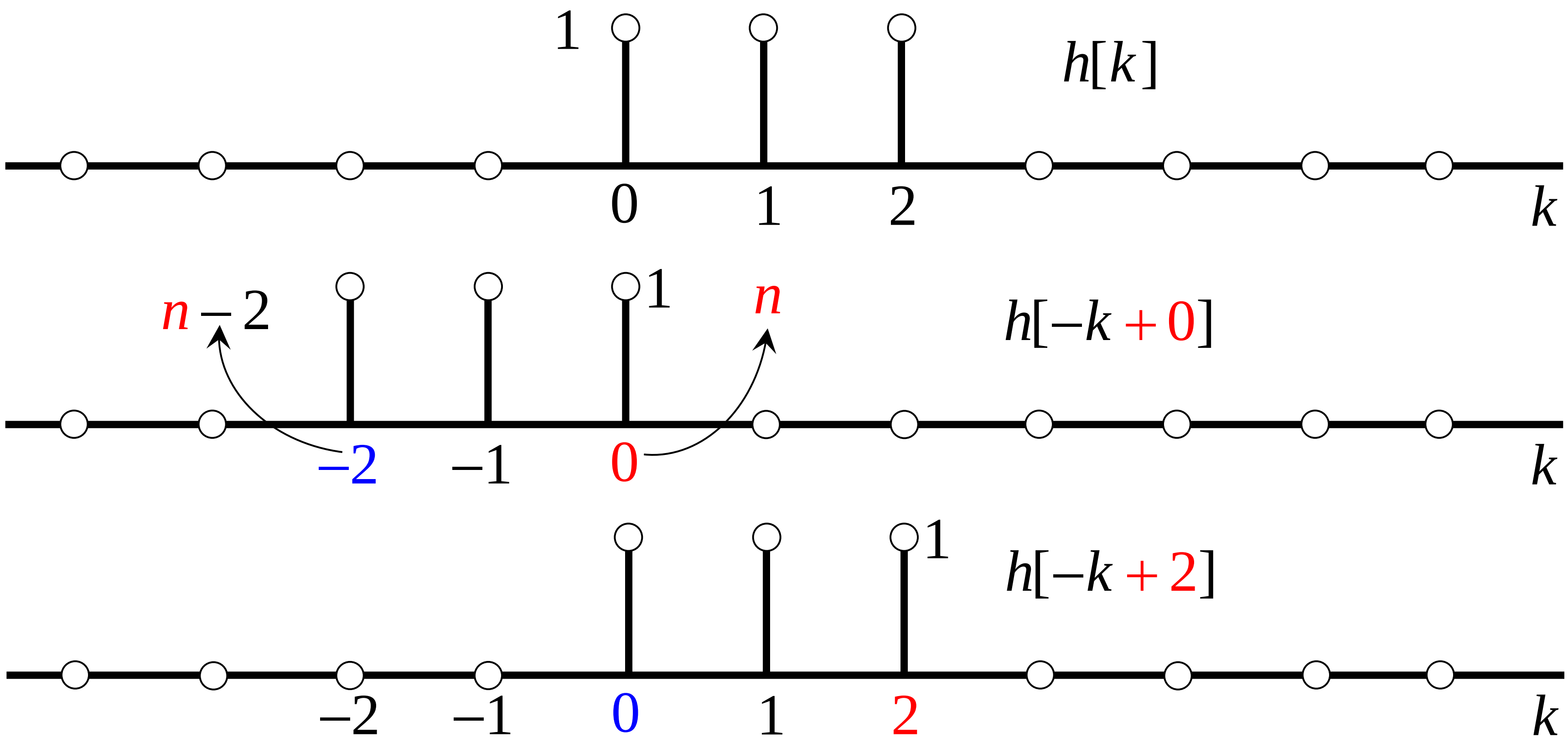
Somatório de Convolução

Primeira Abordagem: $y[n] = 0.5h[n] + 2h[n-1]$



Somatório de Convolução

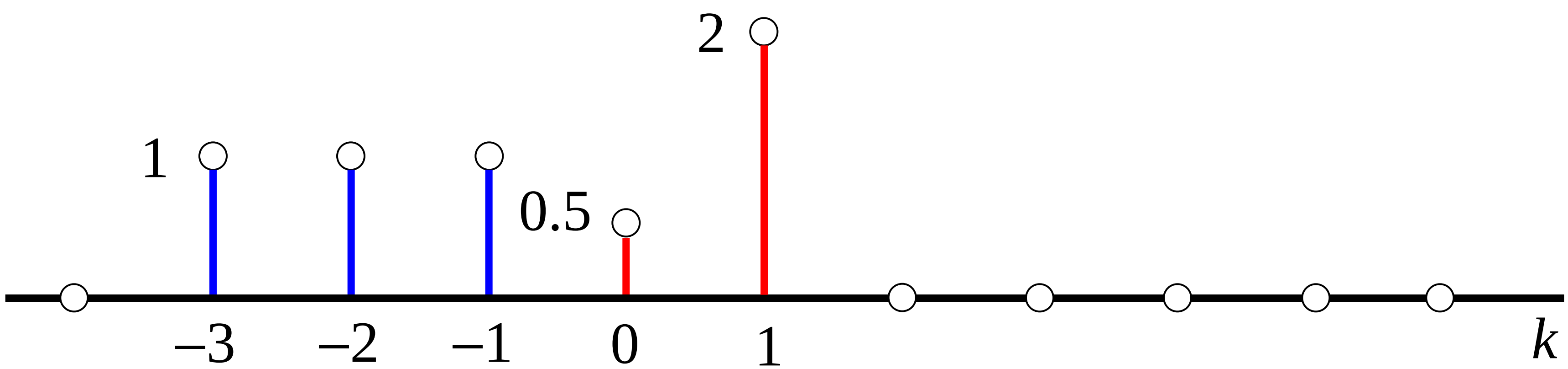
Segunda Abordagem: Rebatendo e Deslocando...



Somatório de Convolução

Segunda Abordagem: Rebatendo e Deslocando...

$x[k]$ e $h[n-k]$



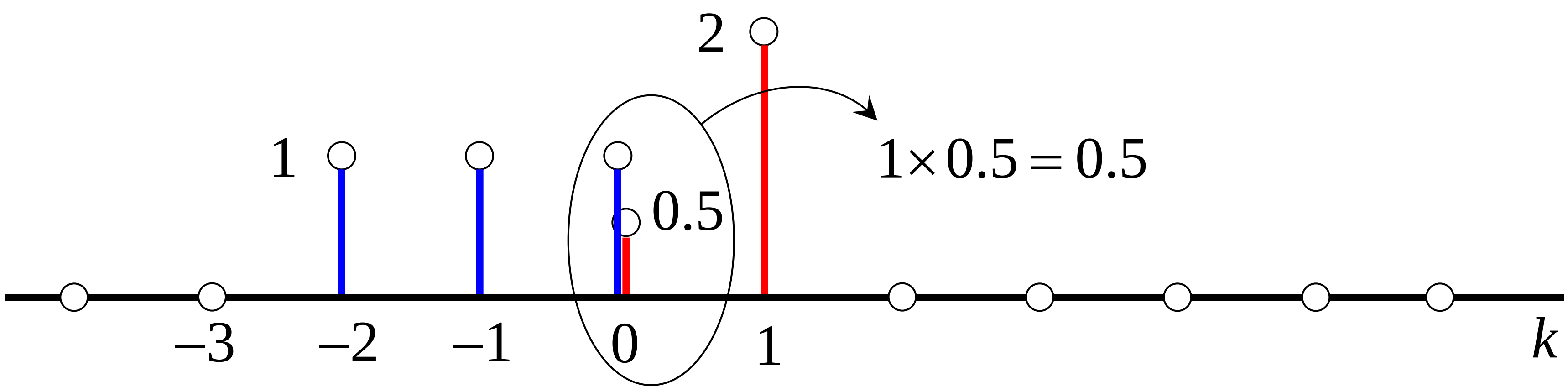
$$n = -1 \quad y[-1] = 0$$

$$n \leq -1 \quad \rightarrow \quad y[n] = 0$$

Somatório de Convolução

Segunda Abordagem: Rebatendo e Deslocando...

$x[k]$ e $h[n-k]$



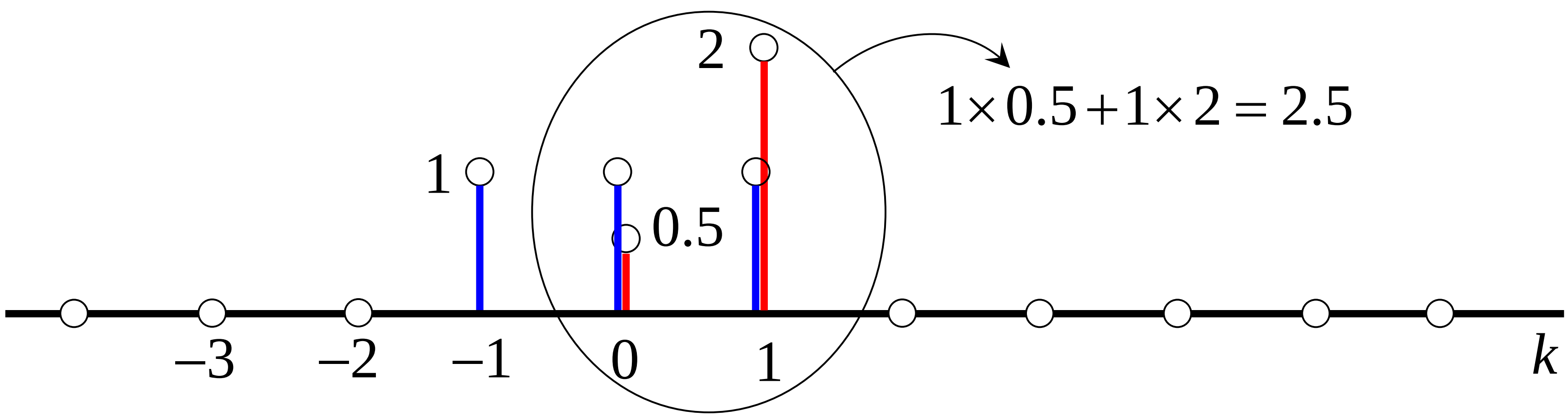
$n = 0 \quad y[0] = 0.5$

A brincadeira começa em $n = 0$...

Somatório de Convolução

Segunda Abordagem: Rebatendo e Deslocando...

$x[k]$ e $h[n-k]$

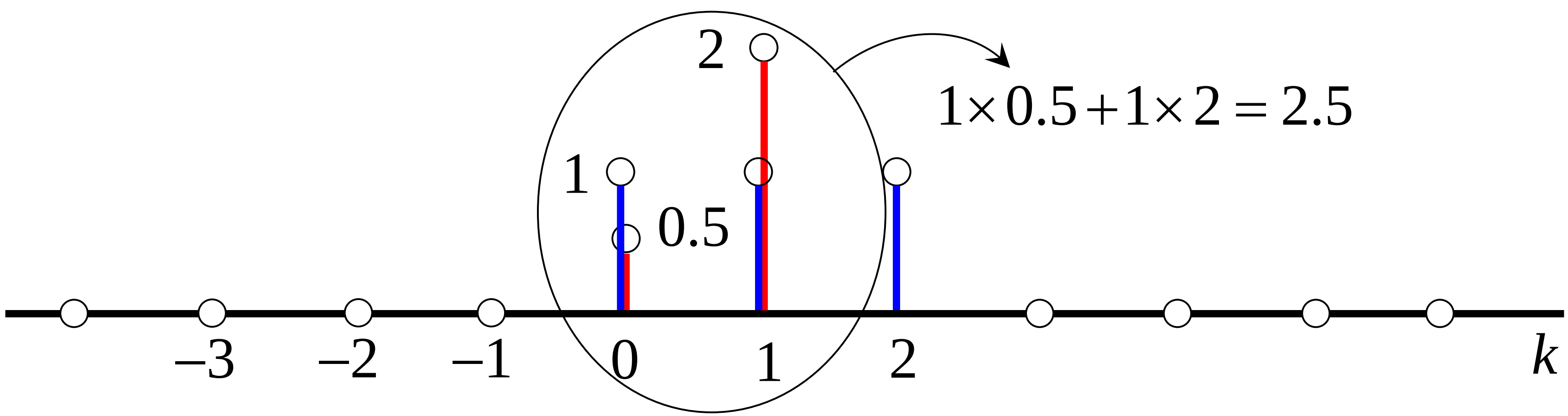


$n=1 \quad y[1]=2.5$

Somatório de Convolução

Segunda Abordagem: Rebatendo e Deslocando...

$x[k]$ e $h[n-k]$

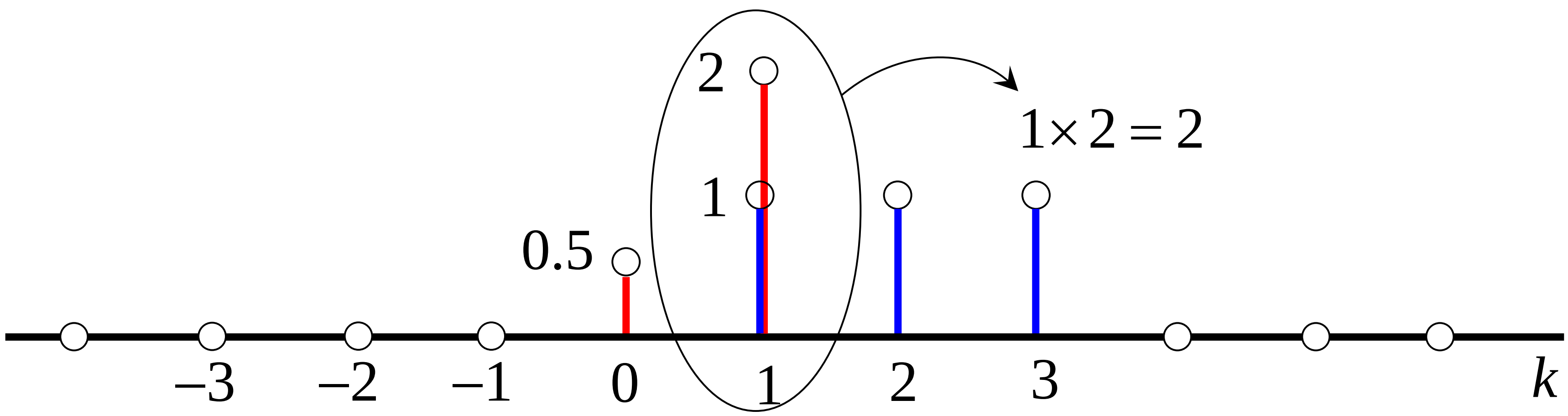


$n=2 \quad y[2]=2.5$

Somatório de Convolução

Segunda Abordagem: Rebatendo e Deslocando...

$x[k]$ e $h[n-k]$



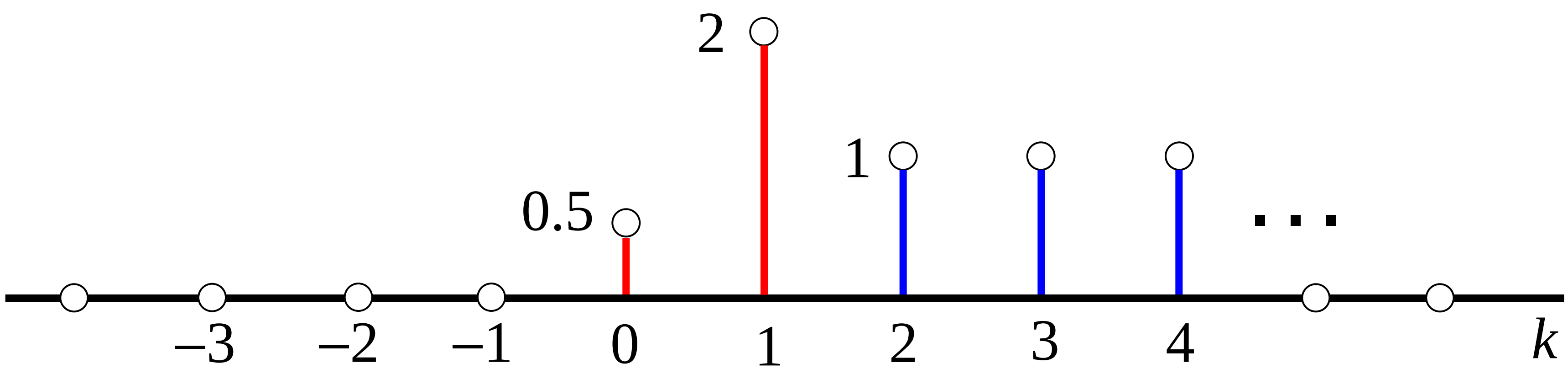
$n = 3 \quad y[3] = 2$

E termina em *n* = 3...

Somatório de Convolução

Segunda Abordagem: Rebatendo e Deslocando...

$x[k]$ e $h[n-k]$



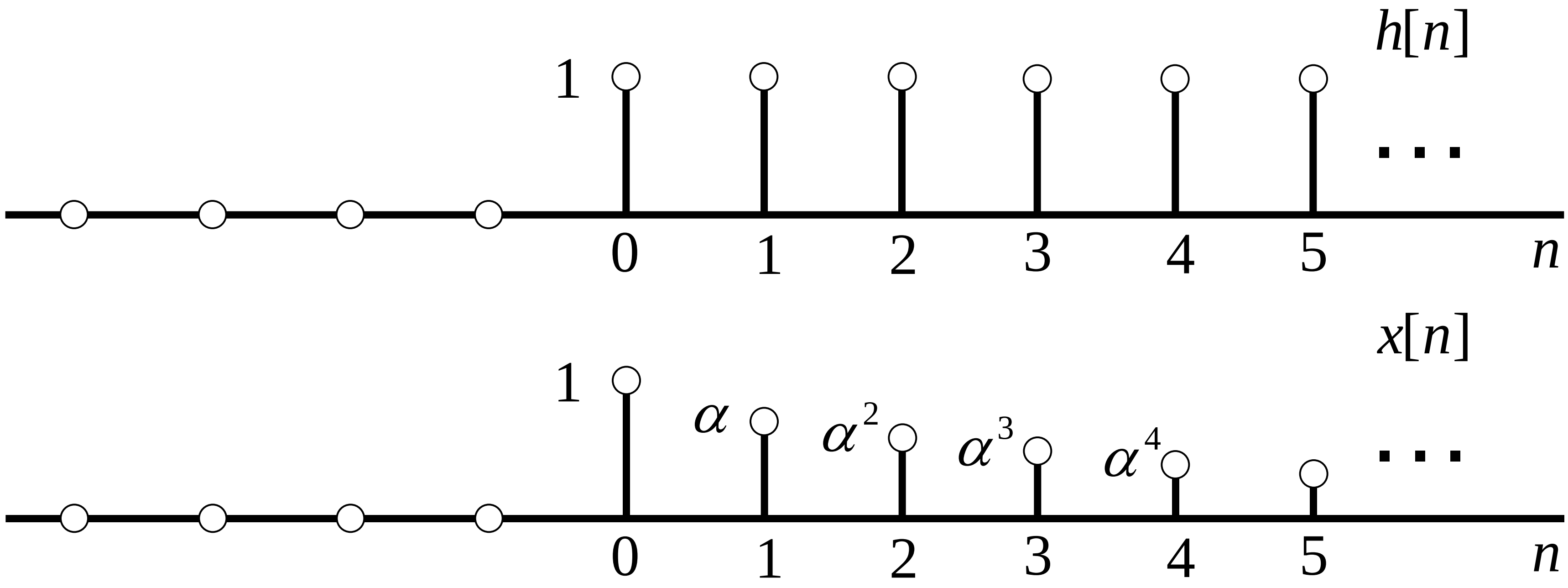
$$n = 4 \quad y[4] = 0$$

$$n \geq 4 \;\rightarrow\; y[n] = 0$$

Somatório de Convolução

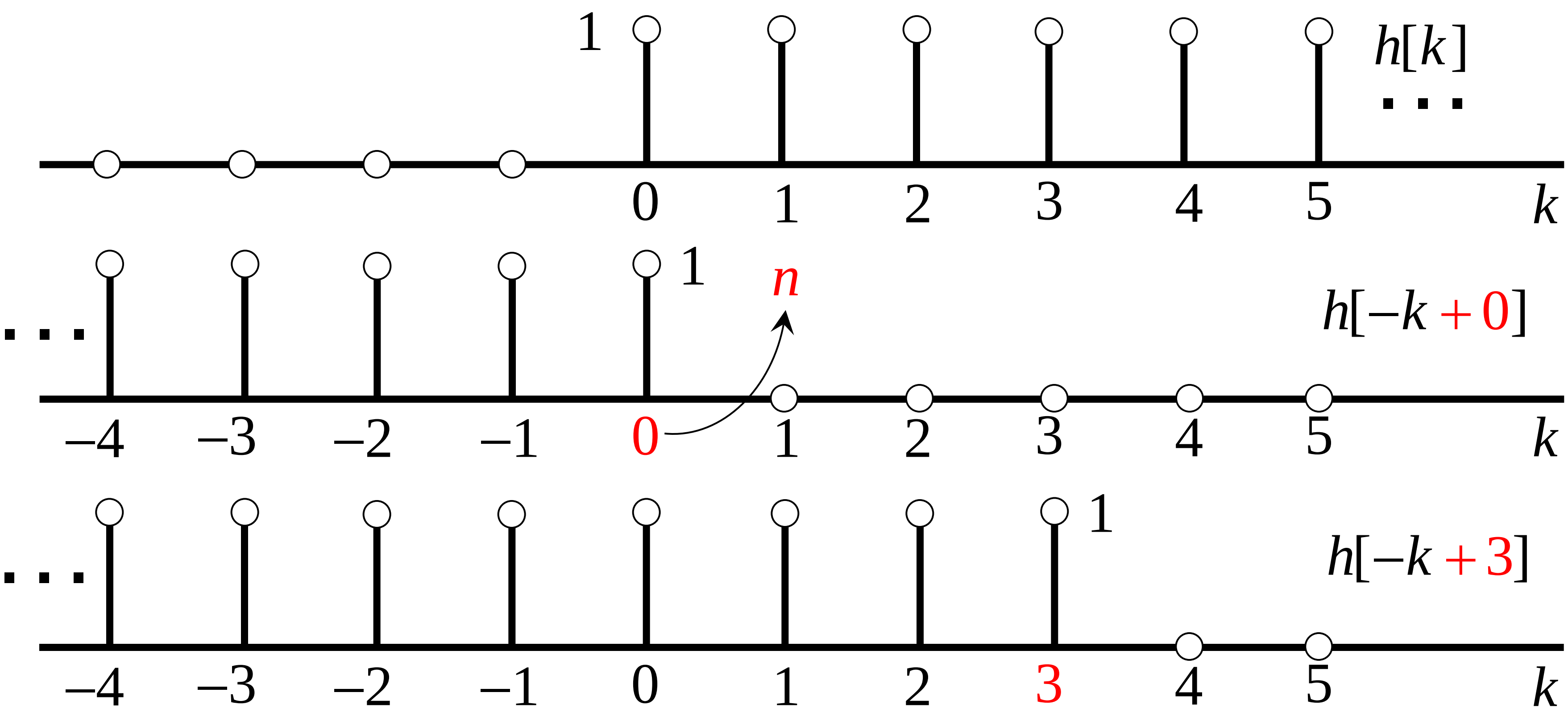
Exemplo

$$h[n] = u[n] \qquad x[n] = \alpha^n u[n], \quad 0 < \alpha < 1$$



Somatório de Convolução

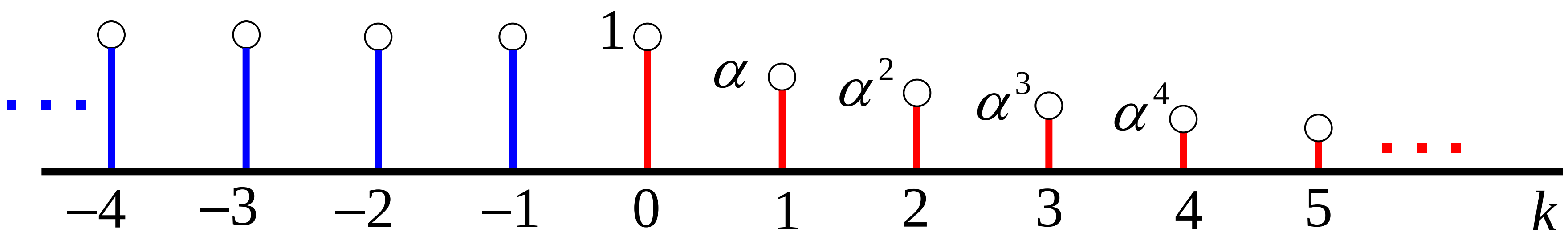
Exemplo



Somatório de Convolução

Segunda Abordagem: Rebatendo e Deslocando...

$$x[k] \; e \; h[n-k]$$



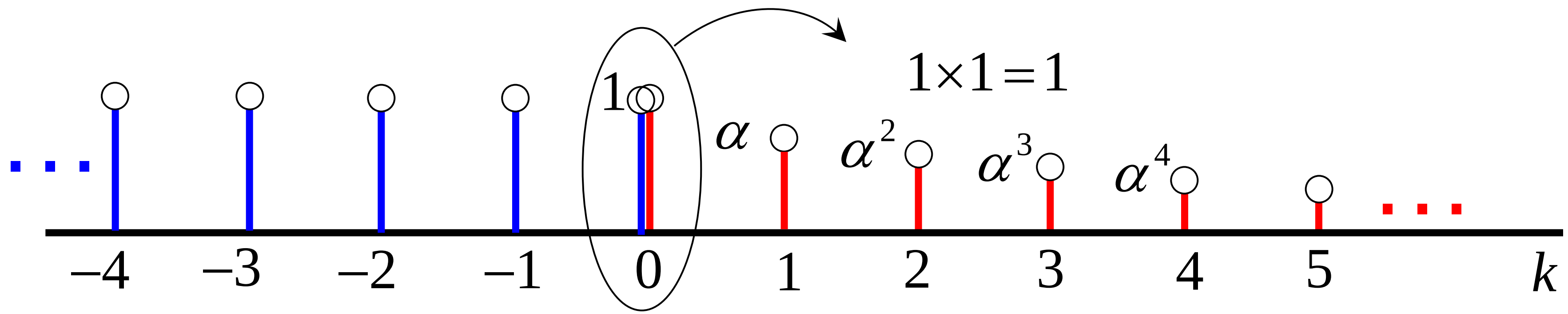
$$n=-1 \quad y[-1]=0$$

$$n \leq -1 \;\rightarrow\; y[n]=0$$

Somatório de Convolução

Segunda Abordagem: Rebatendo e Deslocando...

$x[k]$ e $h[n-k]$



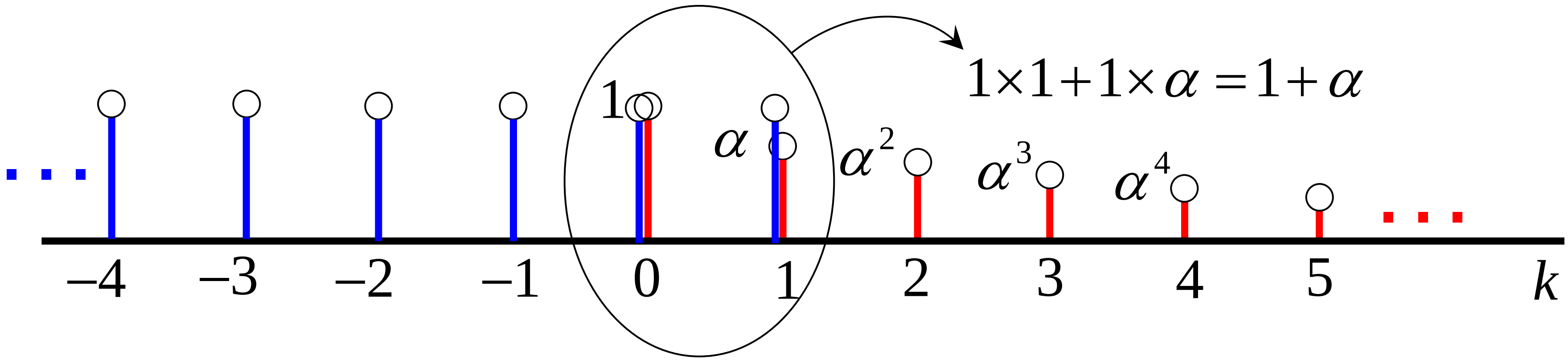
$n = 0 \quad y[0] = 1$

A brincadeira começa em n = 0...

Somatório de Convolução

Segunda Abordagem: Rebatendo e Deslocando...

$x[k]$ e $h[n-k]$

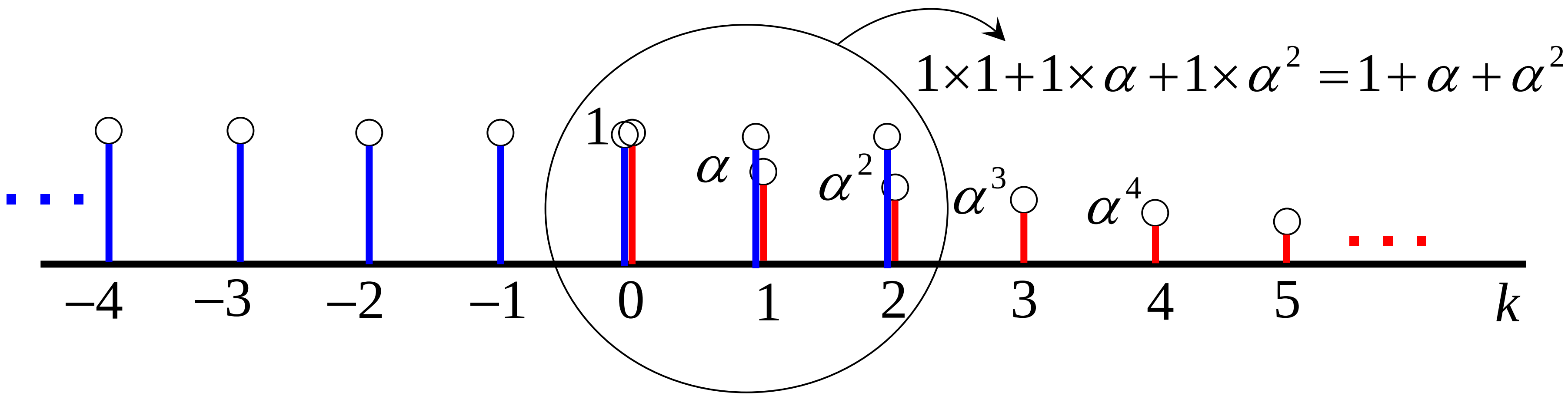


$n=1 \quad y[1]=1+\alpha$

Somatório de Convolução

Segunda Abordagem: Rebatendo e Deslocando...

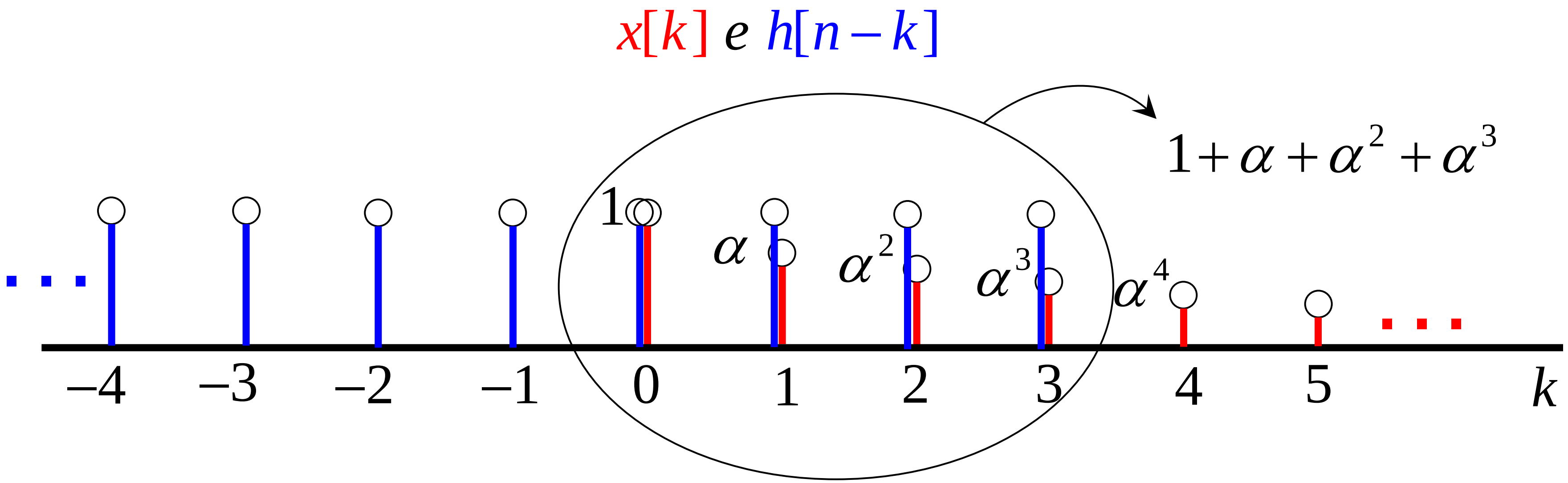
$x[k]$ e $h[n-k]$



$$n=2 \quad y[2]=1+\alpha+\alpha^2$$

Somatório de Convolução

Segunda Abordagem: Rebatendo e Deslocando...



$n=3 \quad y[3]=1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3$

E não termina... Deve-se generalizar o raciocínio...

Somatório de Convolução

Generalizando

$$n \le -1 \quad \rightarrow \quad y[n] = 0 \qquad n = 2 \quad y[2] = 1 + \alpha + \alpha^2$$

$$n = 0 \quad y[0] = 1 \qquad n = 3 \quad y[3] = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3$$

$$n = 1 \quad y[1] = 1 + \alpha \qquad n = n_0 \quad y[n_0] = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots + \alpha^{n_0}$$

$$y[n] = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots + \alpha^n = \boxed{\sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}}, \quad n \ge 0$$

$$y[n] = \left(\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \right) u[n]$$

Somatório de Convolução

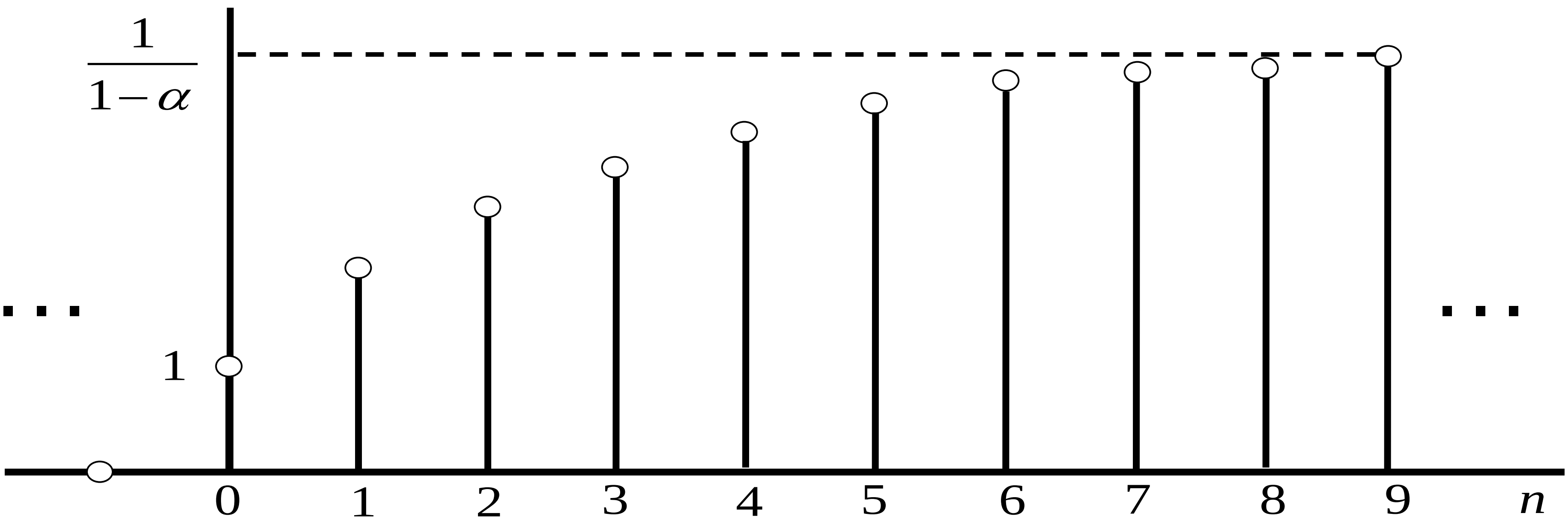
Lembrando da Série (Progressão) Geométrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha}, \quad |\alpha| < 1 \qquad\qquad \sum_{k=i}^{\infty} \alpha^k = \frac{\alpha^i}{1-\alpha}, \quad |\alpha| < 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k - \sum_{n+1}^{\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha} = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

Somatório de Convolução

$$y[n]=\left(\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\right)u[n]$$



Somatório de Convolução

Exemplo

$$h[n]=\begin{cases}1, & n=\pm 1\\ 2, & n=0\\ 0, & caso\ contrário\end{cases}$$

$$x[n]=\begin{cases}2, & n=0\\ 3, & n=1\\ -2, & n=2\\ 0, & caso\ contrário\end{cases}$$

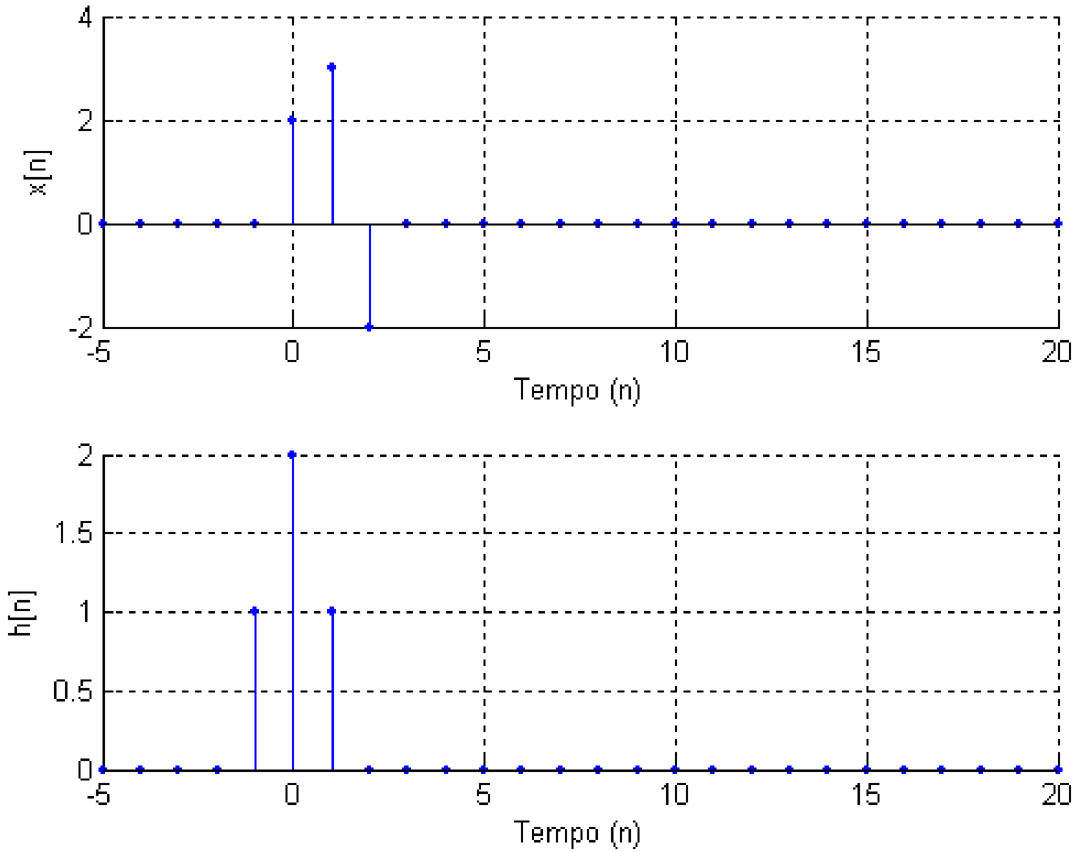
Entrada como Soma de Impulsos: $x[n]=2\delta[n]+3\delta[n-1]-2\delta[n-2]$

Saída como Soma de Respostas ao Impulso Ponderadas e Deslocadas: $y[n]=2h[n]+3h[n-1]-2h[n-2]$

Script em Matlab: M_7_SistemasLTIProg1.m

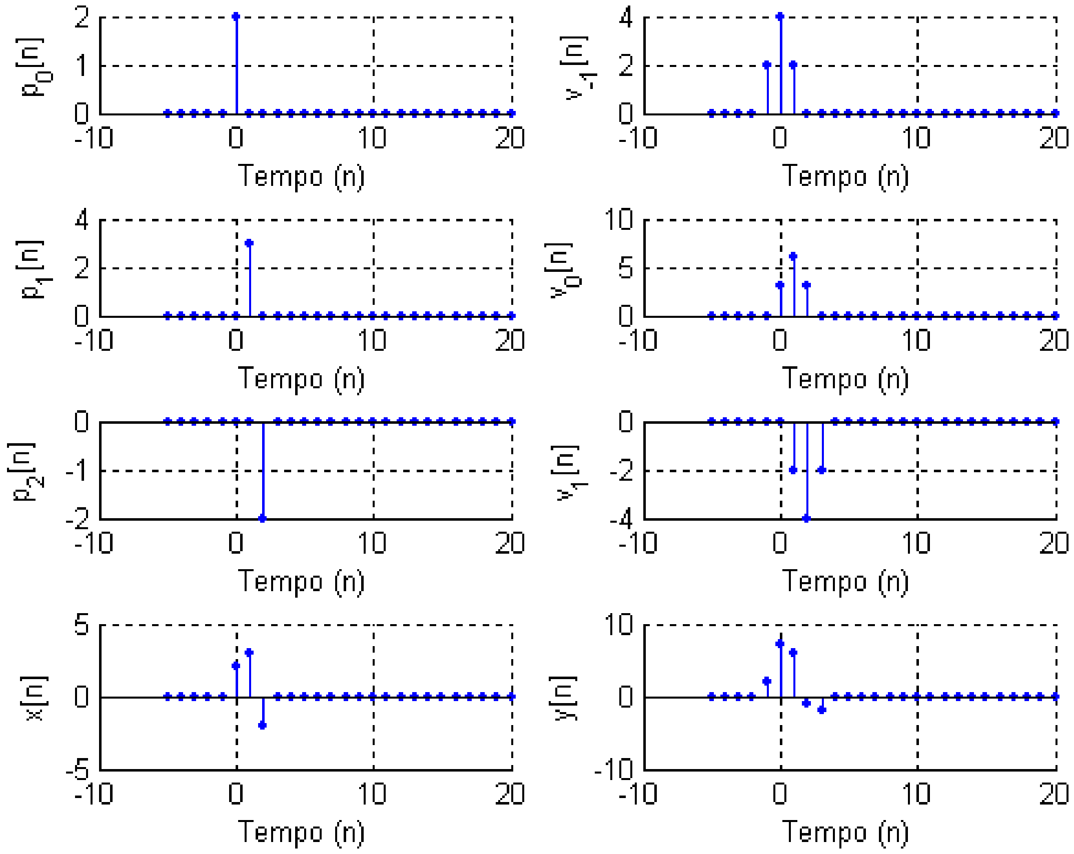
Somatório de Convolução

Sinais $x[n]$ e $h[n]$

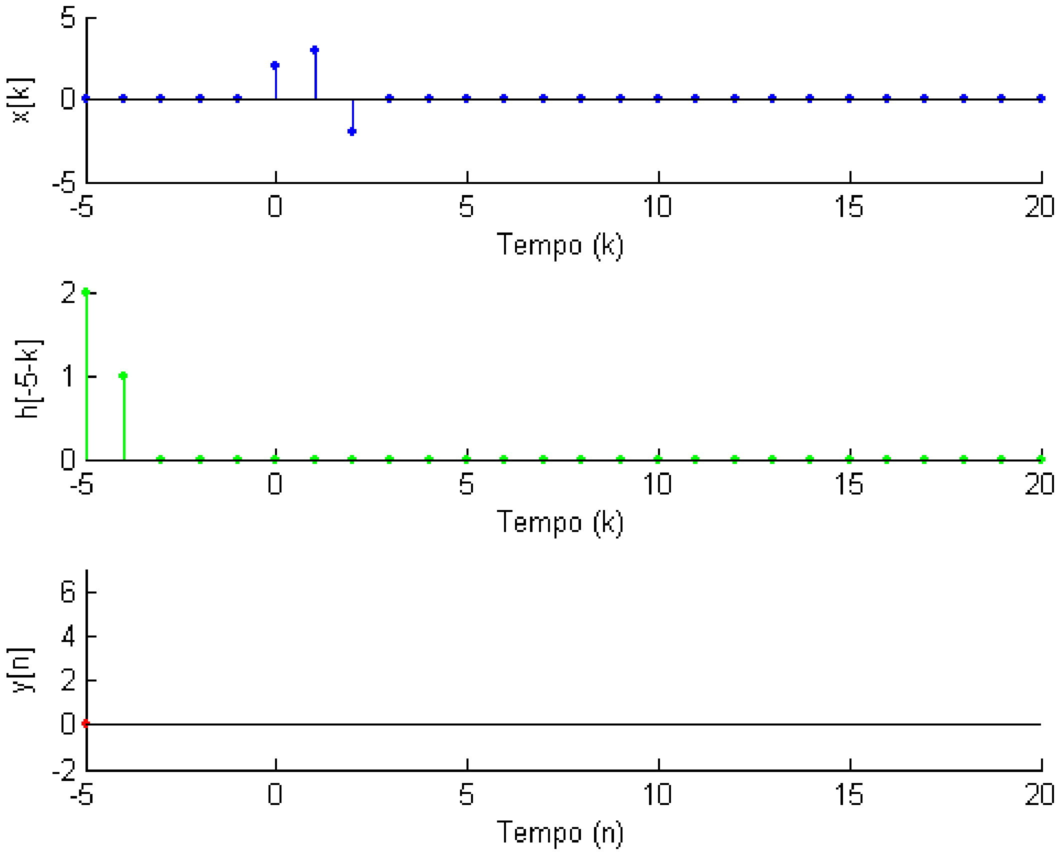


Somatório de Convolução

Primeira Abordagem: $y[n] = 2h[n] + 3h[n-1] - 2h[n-2]$

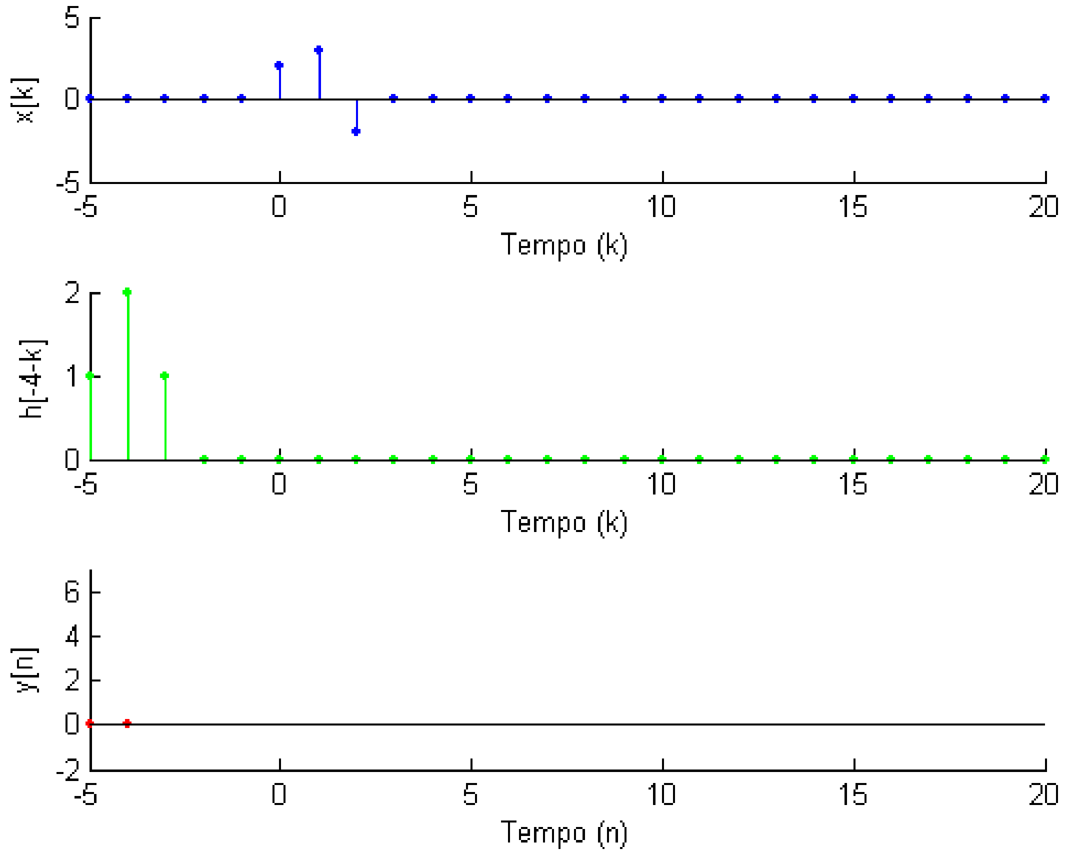


n = -5

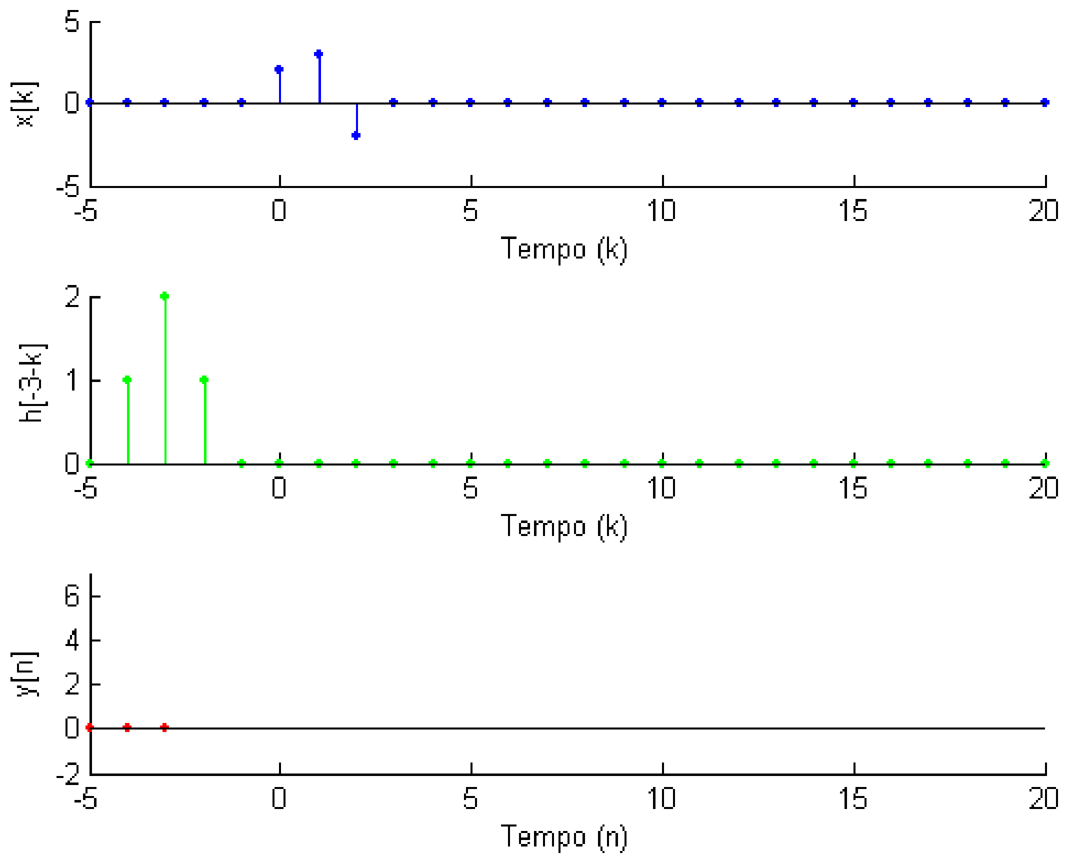


x[k]
5
0
-5
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
h[-5-k]
2
1
0
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
y[n]
6
4
2
0
-2
-5
0
5
10
15
20
Tempo (n)

n = -4

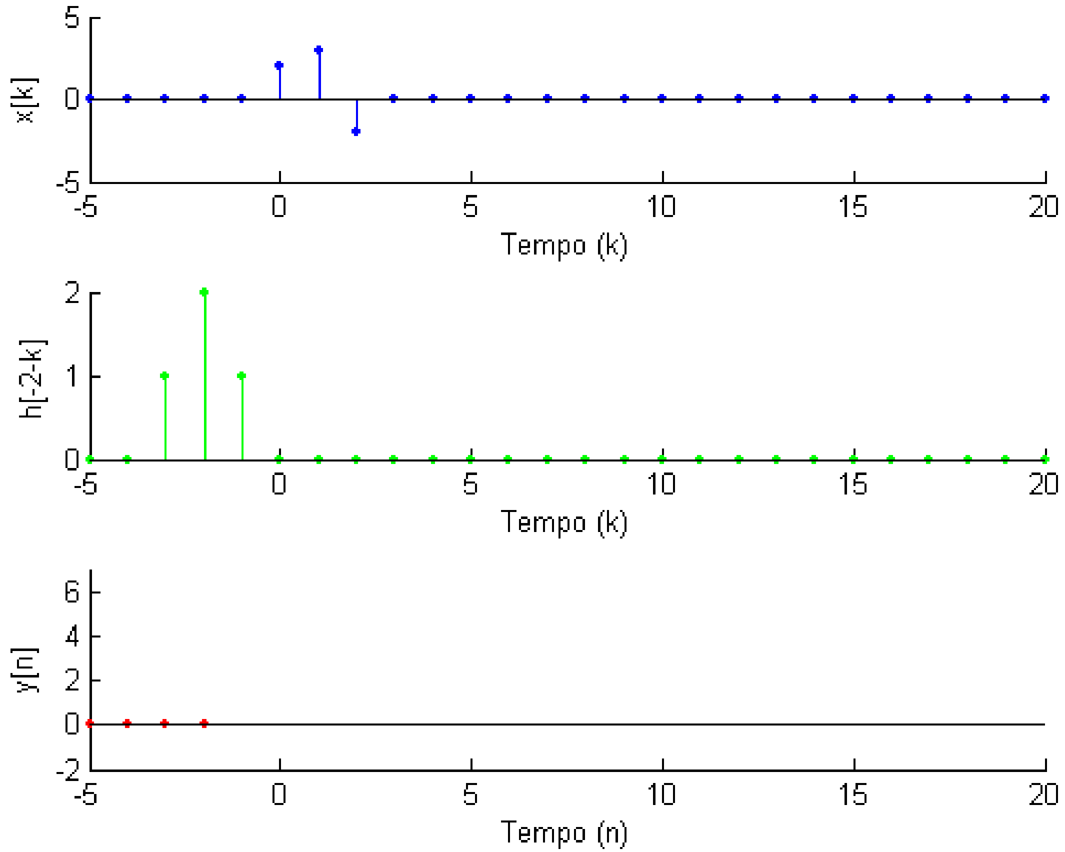

x[k]
5
0
-5
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
h[-4-k]
2
1
0
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
y[n]
6
4
2
0
-2
-5
0
5
10
15
20
Tempo (n)

n = -3

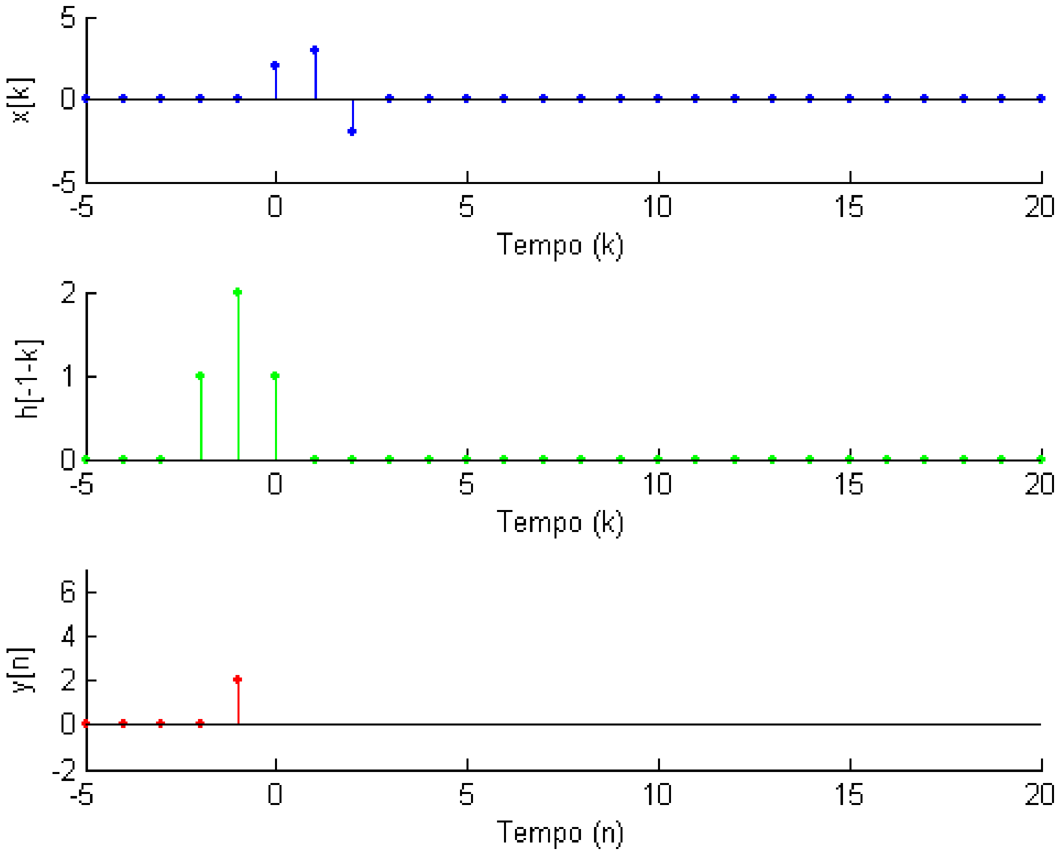


5
0
-5
x[k]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
2
1
0
h[-3-k]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
6
4
2
0
-2
y[n]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (n)

n = -2

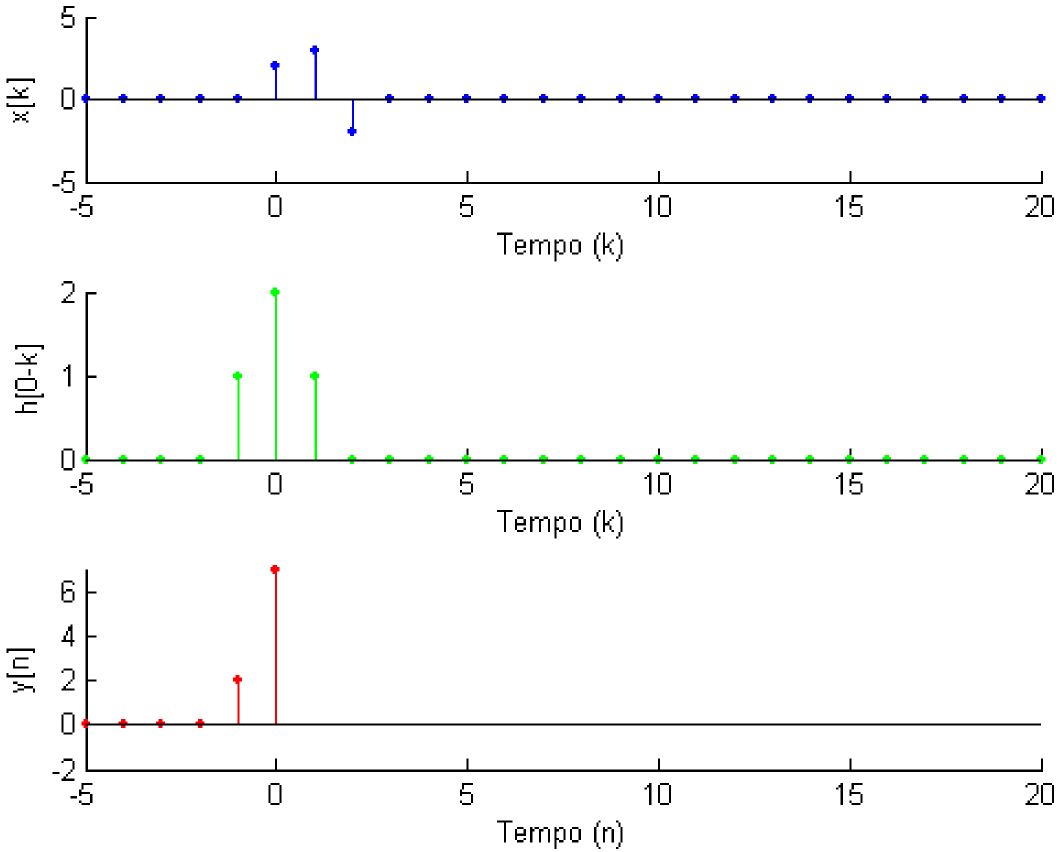

x[k]
5
0
-5
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
h[-2-k]
2
1
0
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
y[n]
6
4
2
0
-2
-5
0
5
10
15
20
Tempo (n)

n = -1

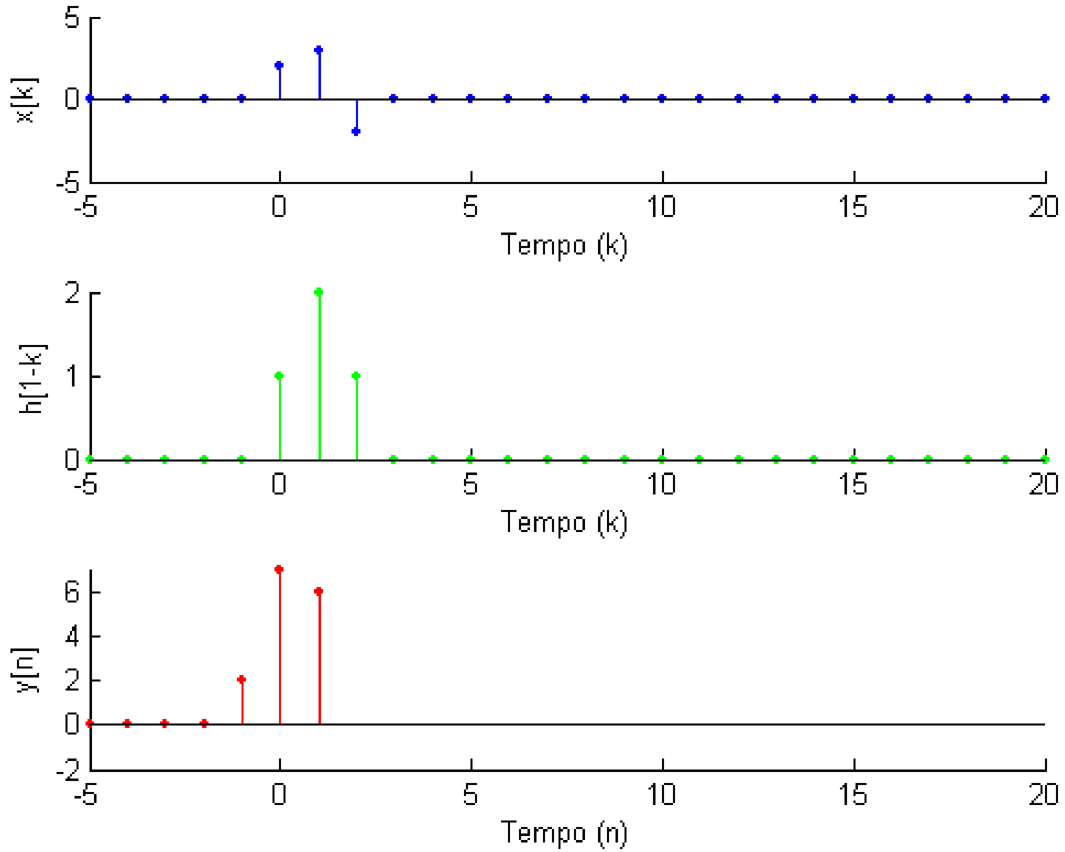


5
0
-5
x[k]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
2
1
0
h[-1-k]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
6
4
2
0
-2
y[n]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (n)

n = 0

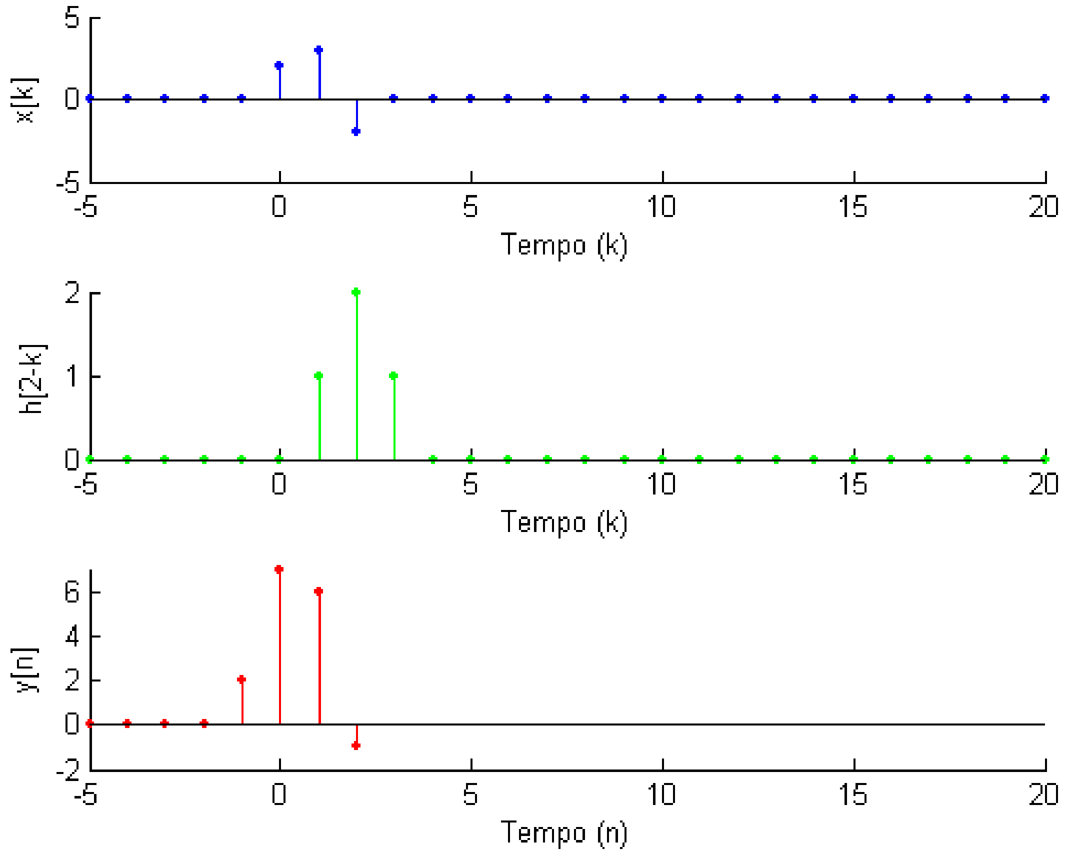

x[k]
5
0
-5
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
h[0-k]
2
1
0
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
y[n]
6
4
2
0
-2
-5
0
5
10
15
20
Tempo (n)

n = 1



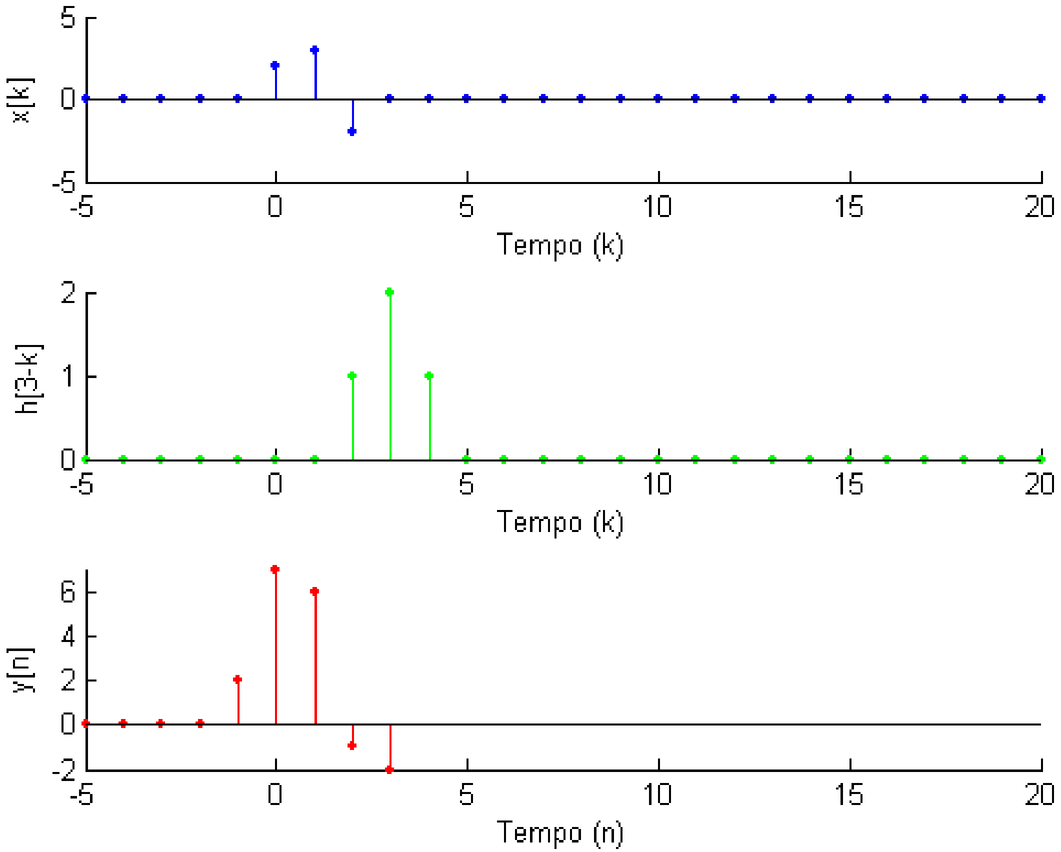
5
0
-5
x[k]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
2
1
0
h[1-k]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
6
4
2
0
-2
y[n]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (n)

n = 2



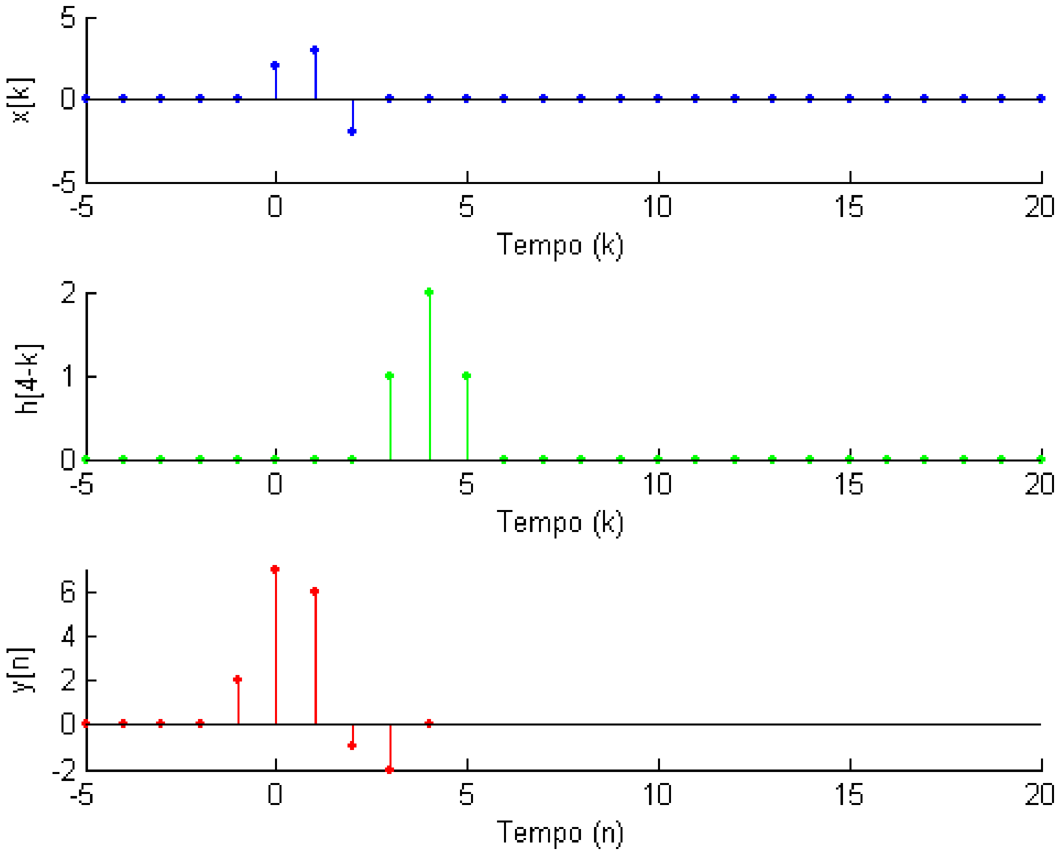
5
0
-5
x[k]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
2
1
0
h[2-k]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
6
4
2
0
-2
y[n]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (n)

n = 3

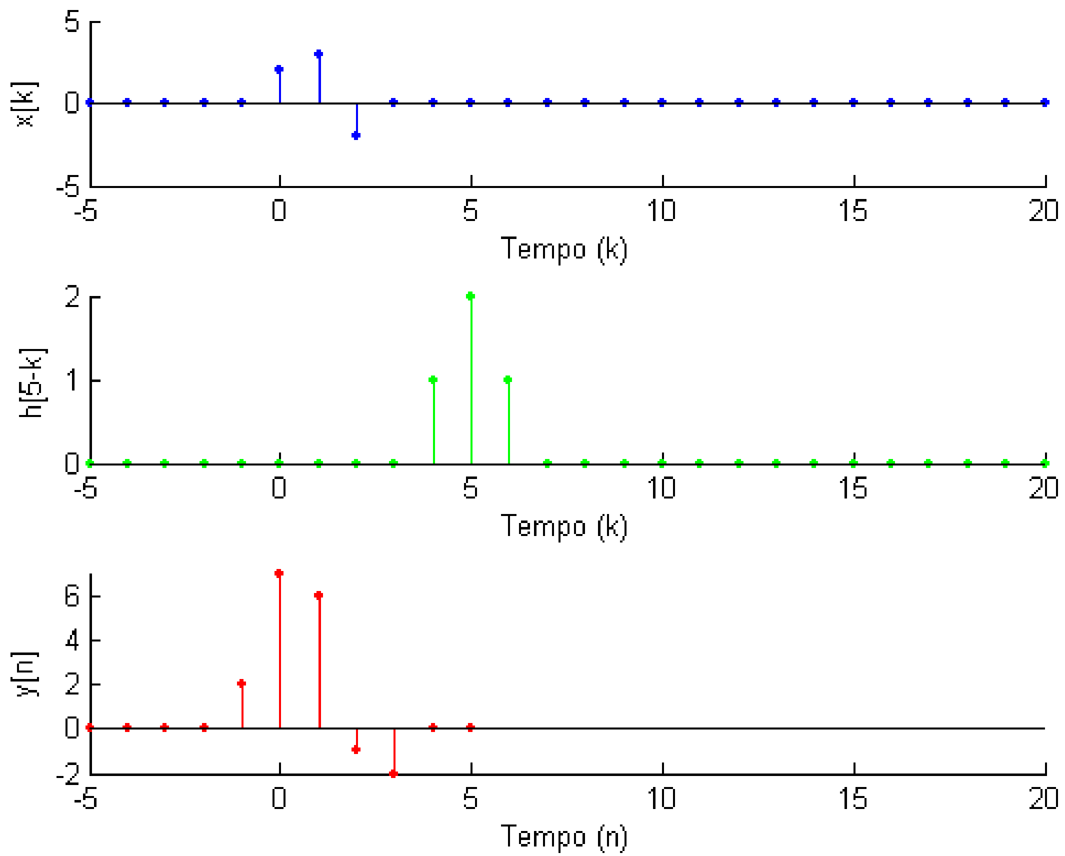


x[k]
5
0
-5
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
h[3-k]
2
1
0
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
y[n]
6
4
2
0
-2
-5
0
5
10
15
20
Tempo (n)

n = 4

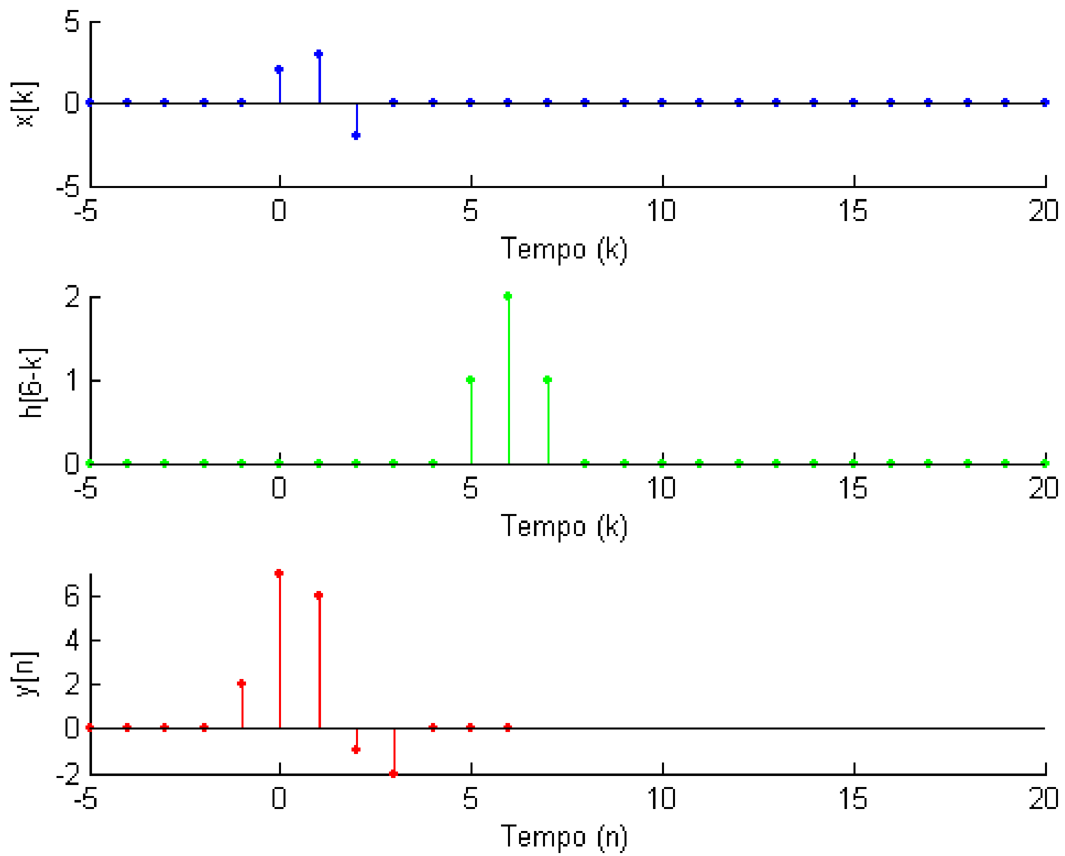

5
0
-5
x[k]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
2
1
0
h[4-k]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
6
4
2
0
-2
y[n]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (n)

n = 5

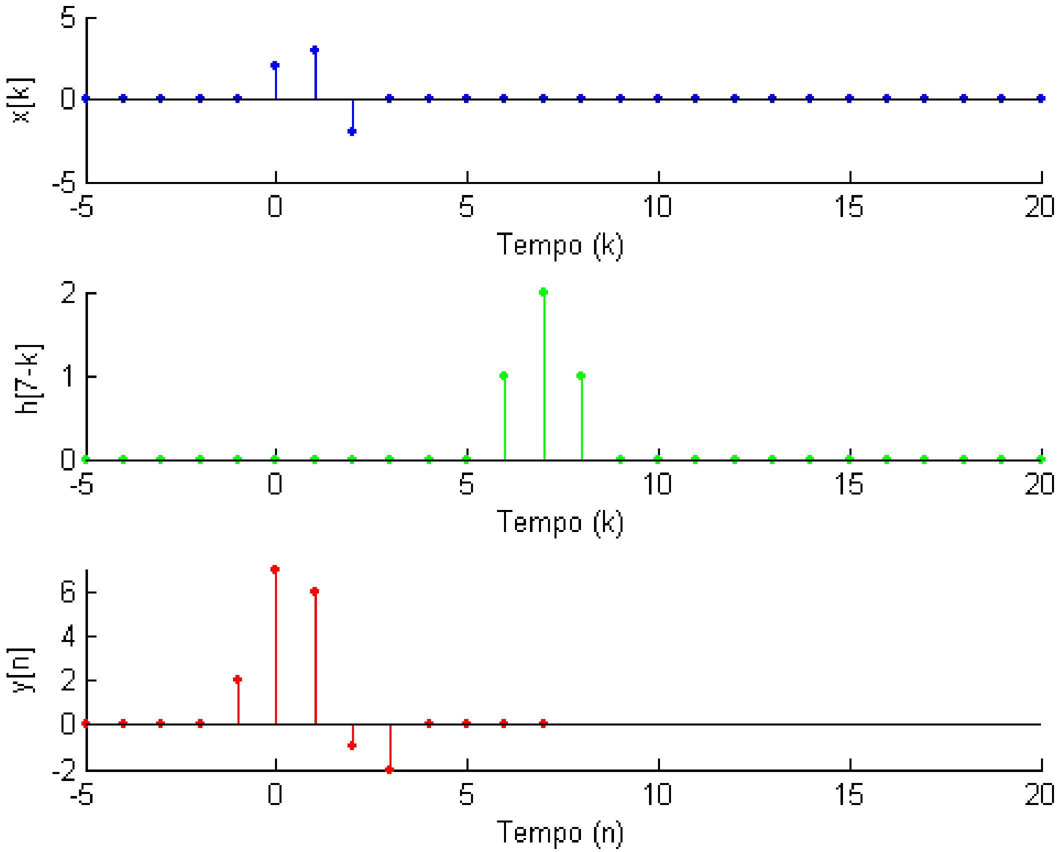


5
0
-5
x[k]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
2
1
0
h[5-k]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
6
4
2
0
-2
y[n]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (n)

n = 6

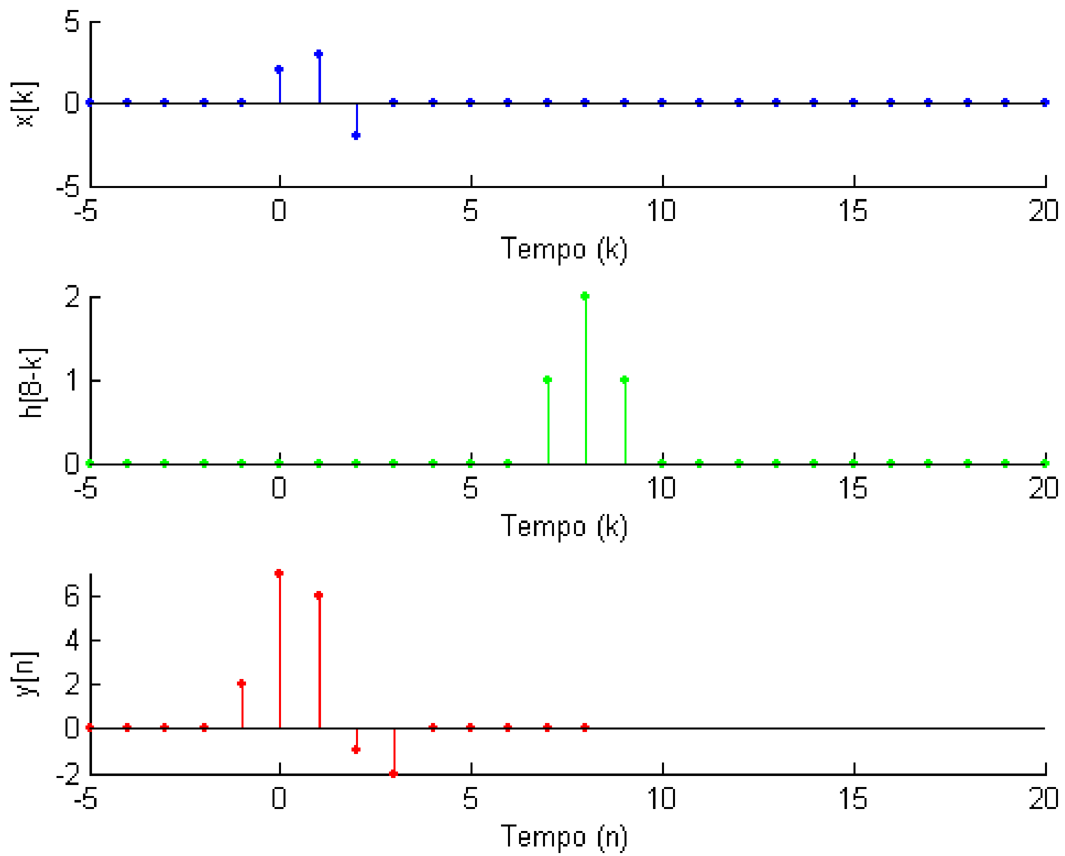


n = 7



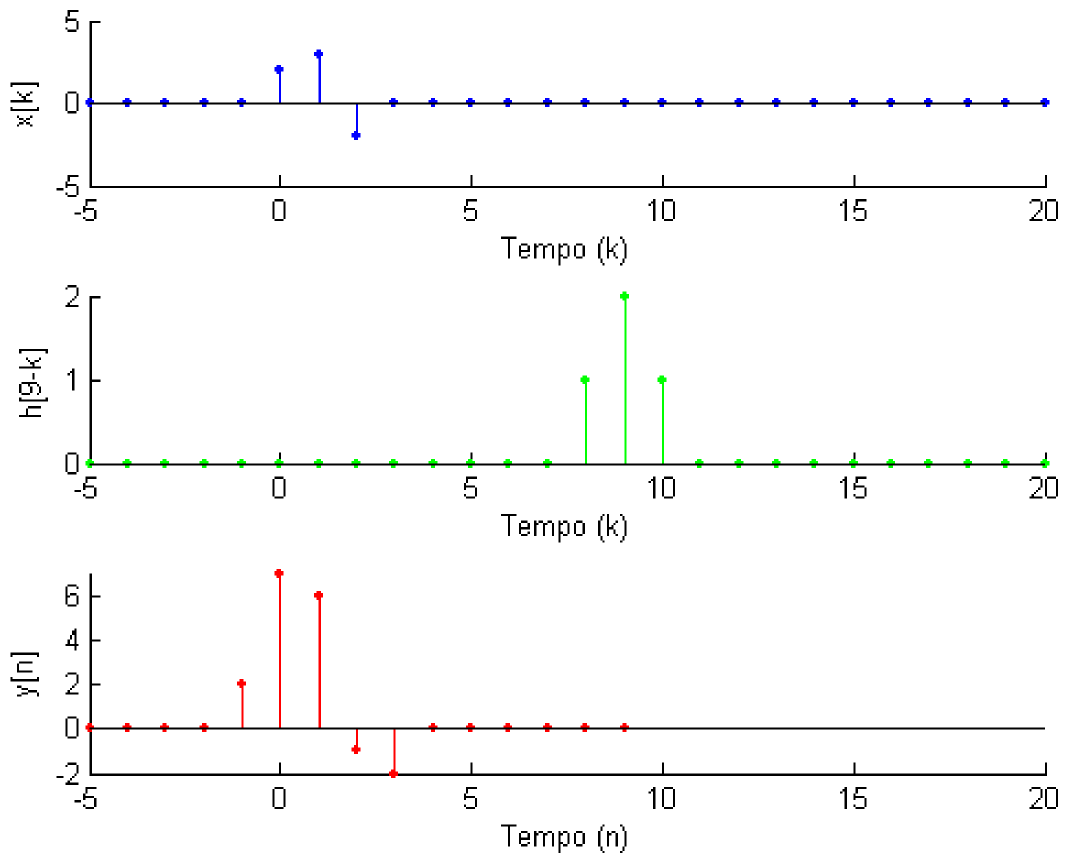
5
0
-5
x[k]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
2
1
0
h[7-k]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
6
4
2
0
-2
y[n]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (n)

n = 8



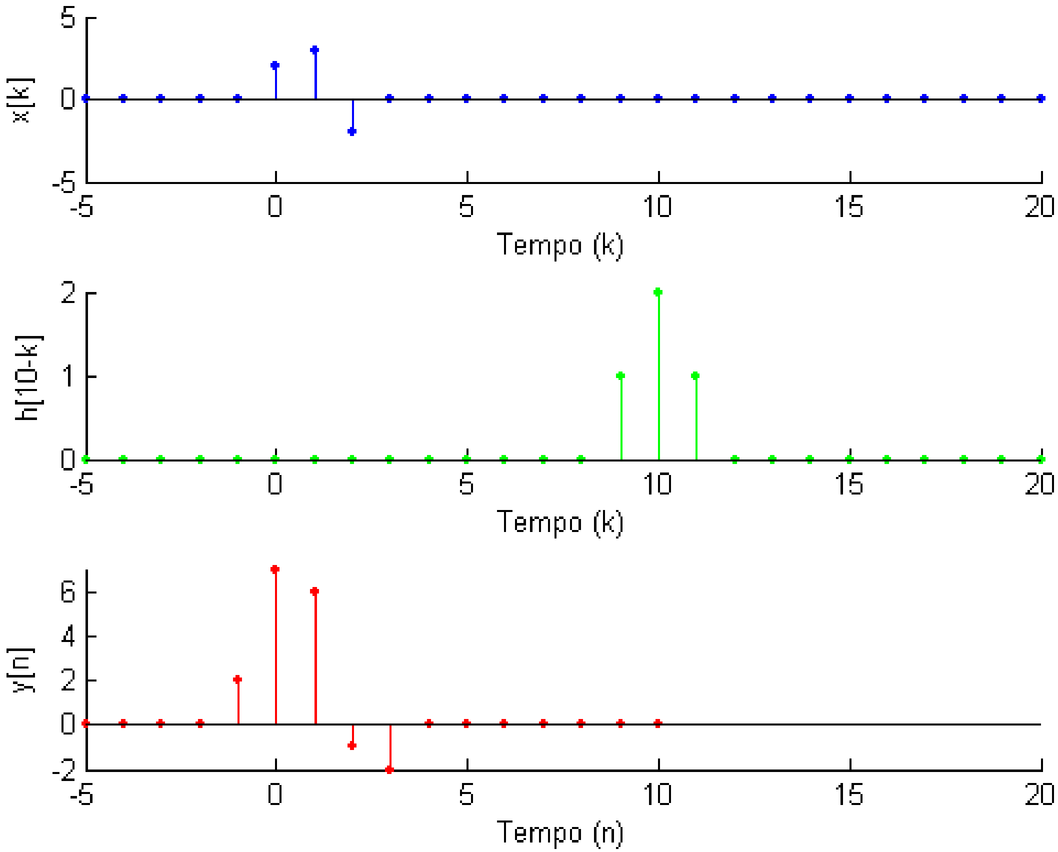
5
0
-5
x[k]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
2
1
0
h[8-k]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
6
4
2
0
-2
y[n]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (n)

n = 9



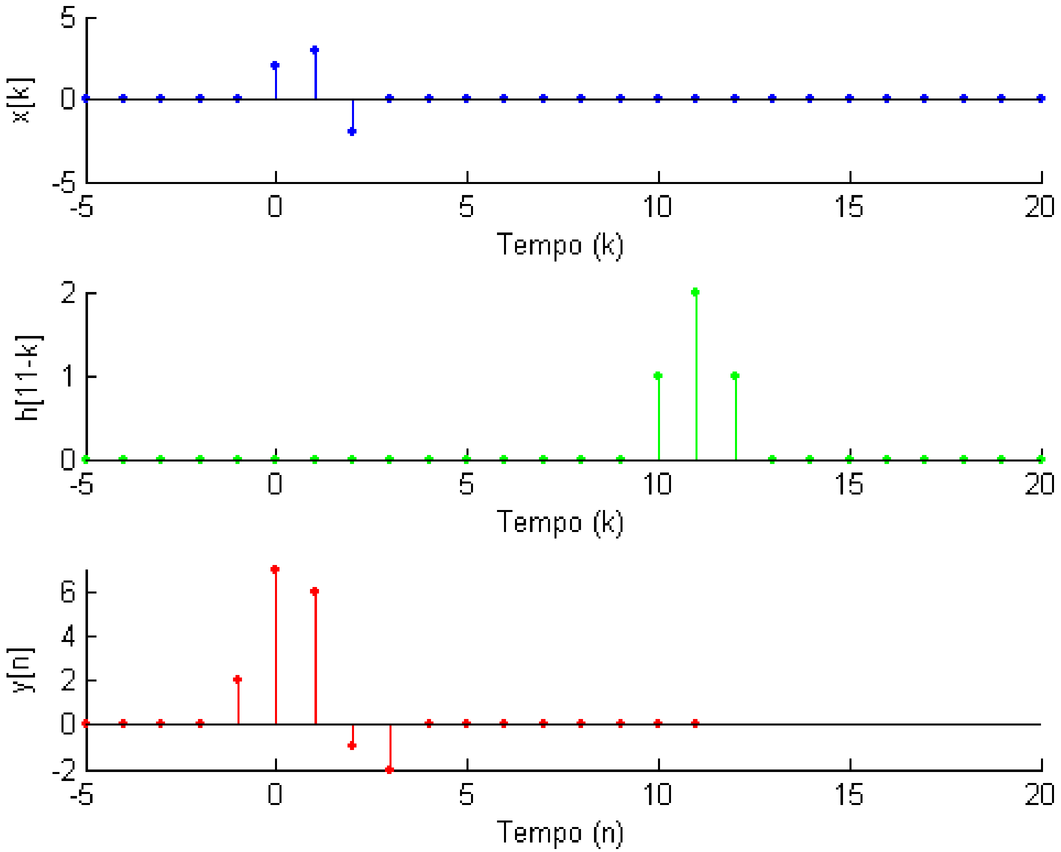
5
0
-5
x[k]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
2
1
0
h[9-k]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
6
4
2
0
-2
y[n]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (n)

n = 10



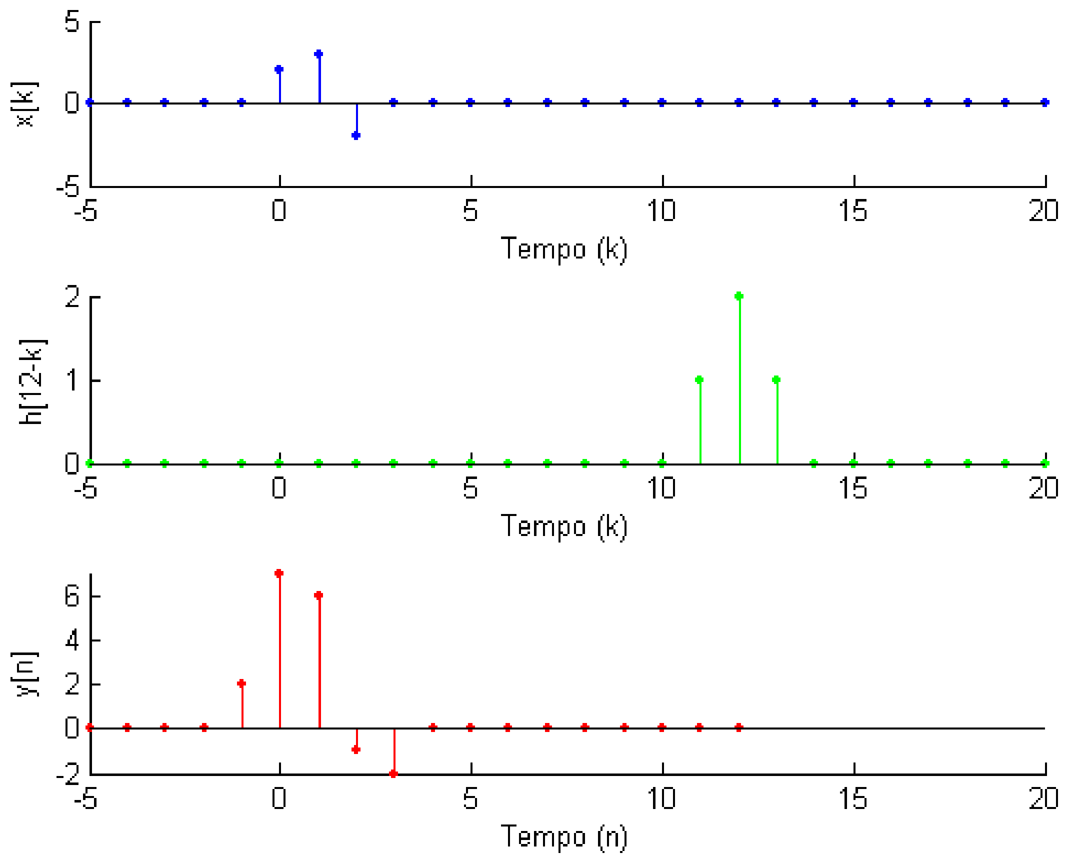
5
0
-5
x[k]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
2
1
0
h[10-k]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
6
4
2
0
-2
y[n]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (n)

n = 11



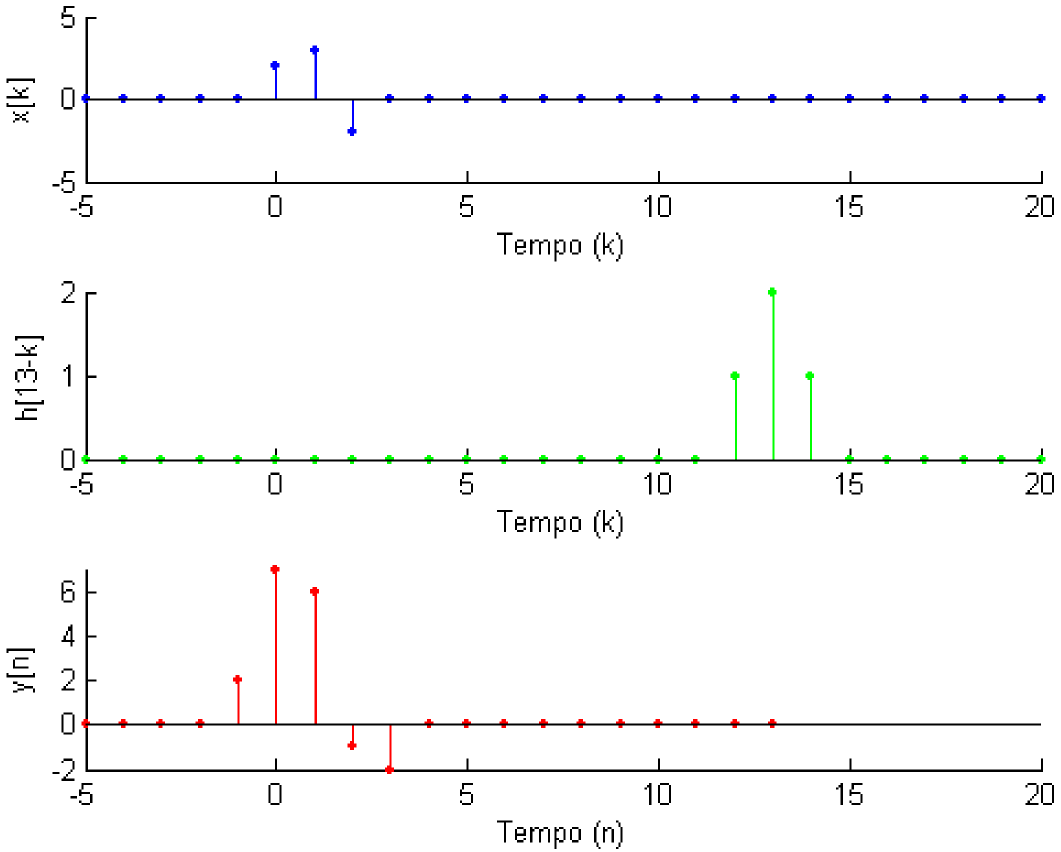
5
0
-5
x[k]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
2
1
0
h[11-k]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
6
4
2
0
-2
y[n]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (n)

n = 12

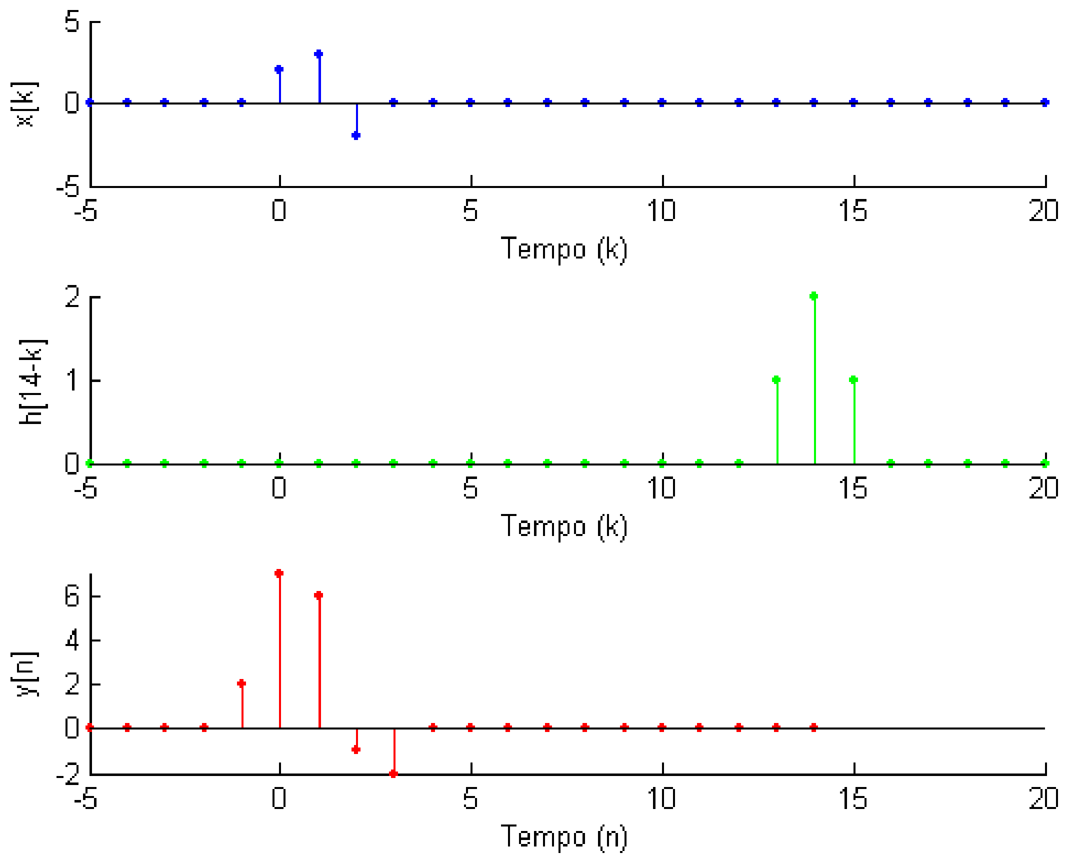


x[k]
5
0
-5
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
h[12-k]
2
1
0
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
y[n]
6
4
2
0
-2
-5
0
5
10
15
20
Tempo (n)

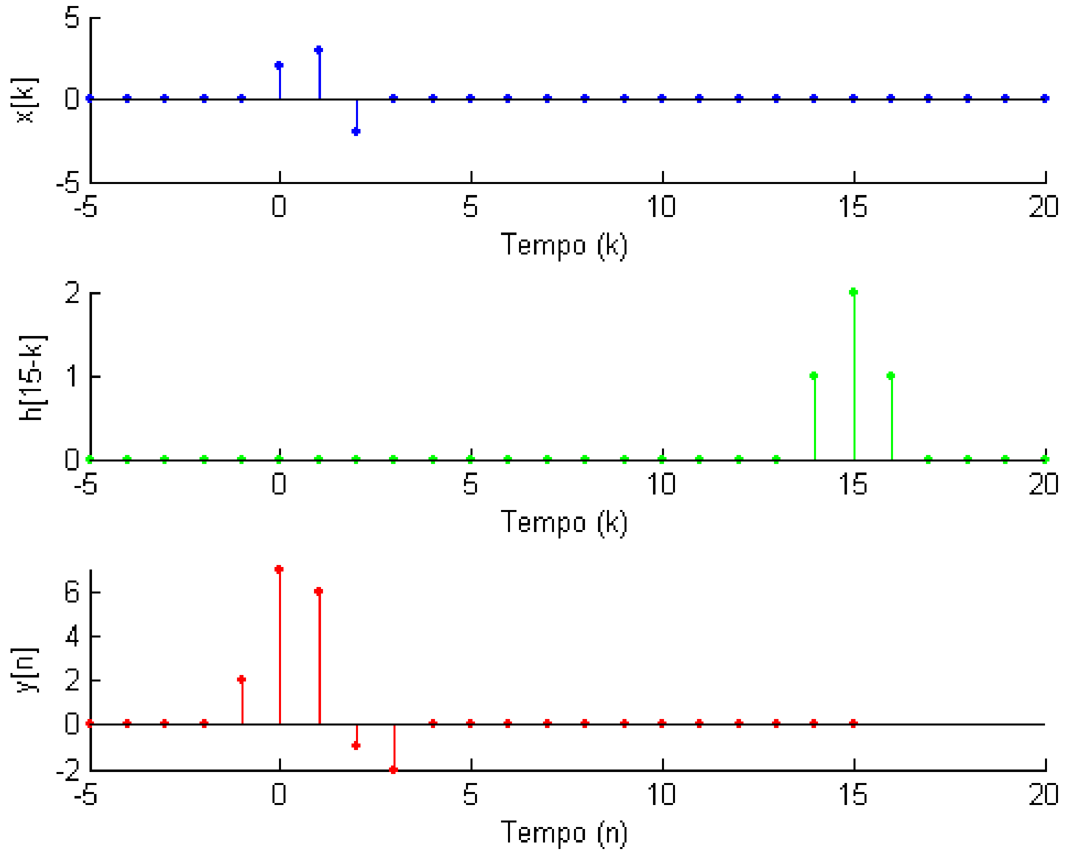
n = 13



n = 14

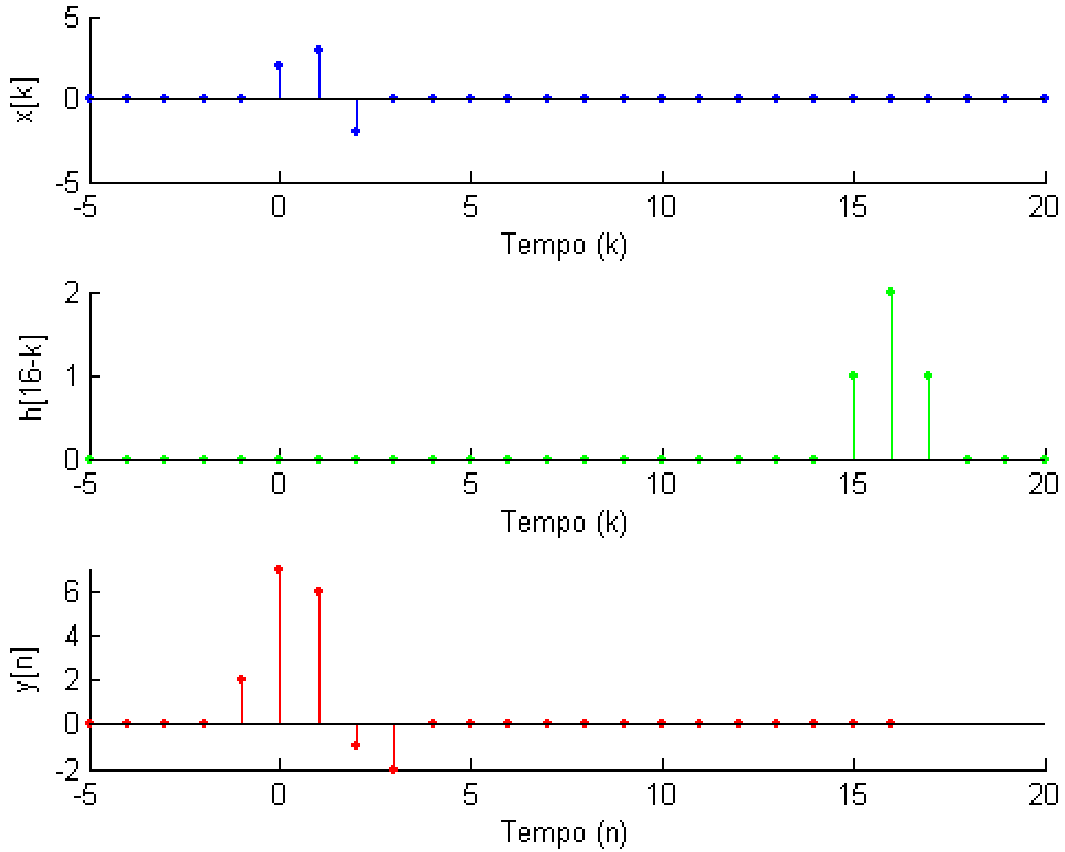

5
0
-5
x[k]
-5 0 5 10 15 20
Tempo (k)
2
1
0
h[14-k]
-5 0 5 10 15 20
Tempo (k)
6
4
2
0
-2
y[n]
-5 0 5 10 15 20
Tempo (n)

n = 15



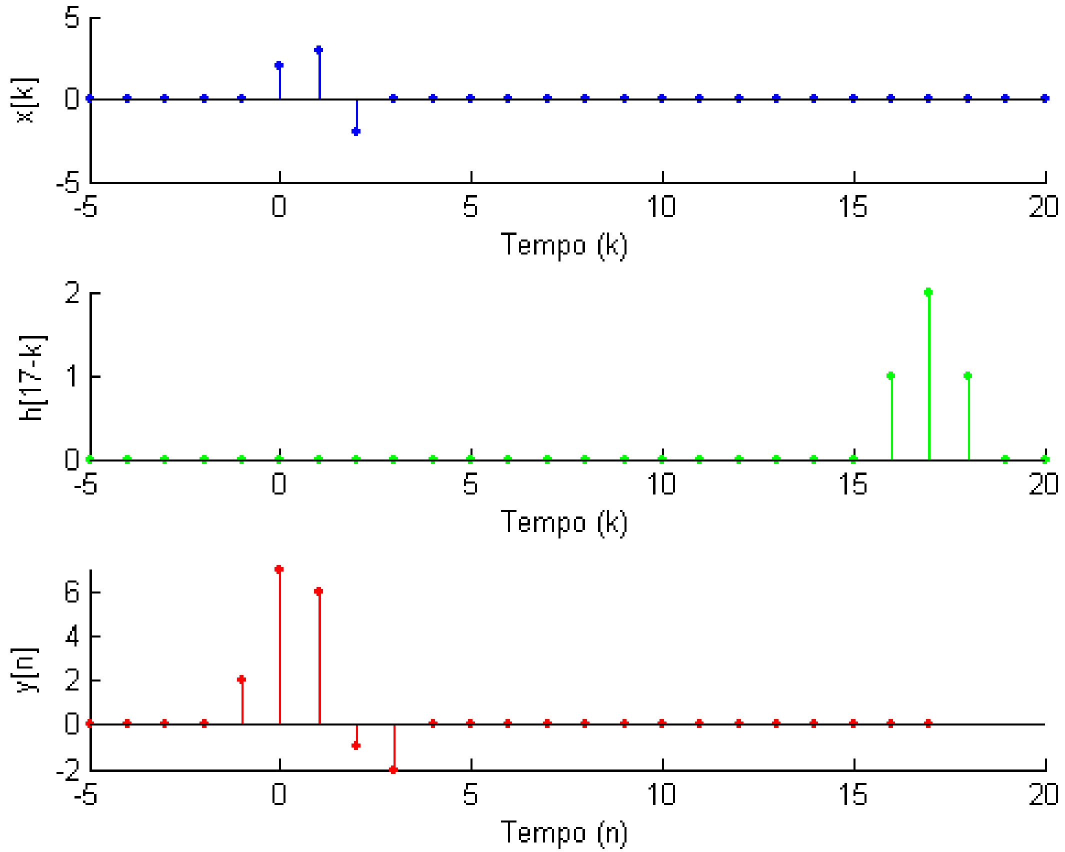
5
0
-5
x[k]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
2
1
0
h[15-k]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
6
4
2
0
-2
y[n]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (n)

n = 16



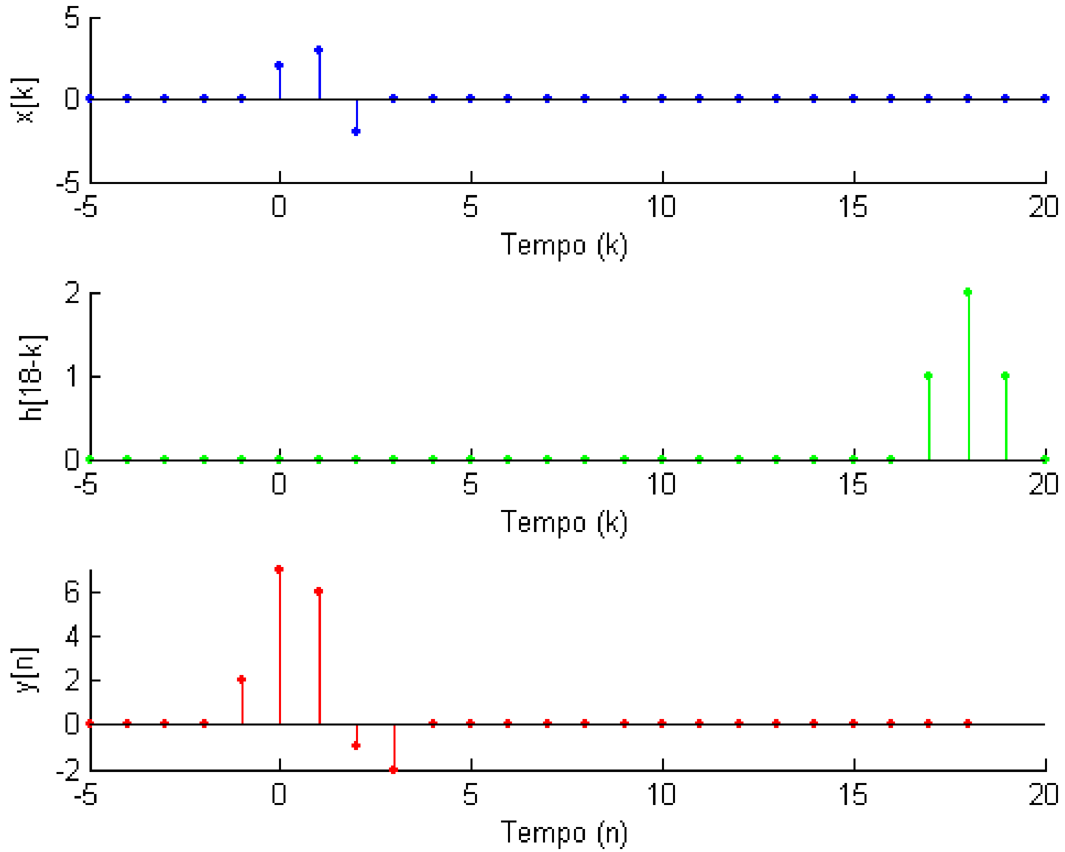
5
0
-5
x[k]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
2
1
0
h[16-k]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
6
4
2
0
-2
y[n]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (n)

n = 17

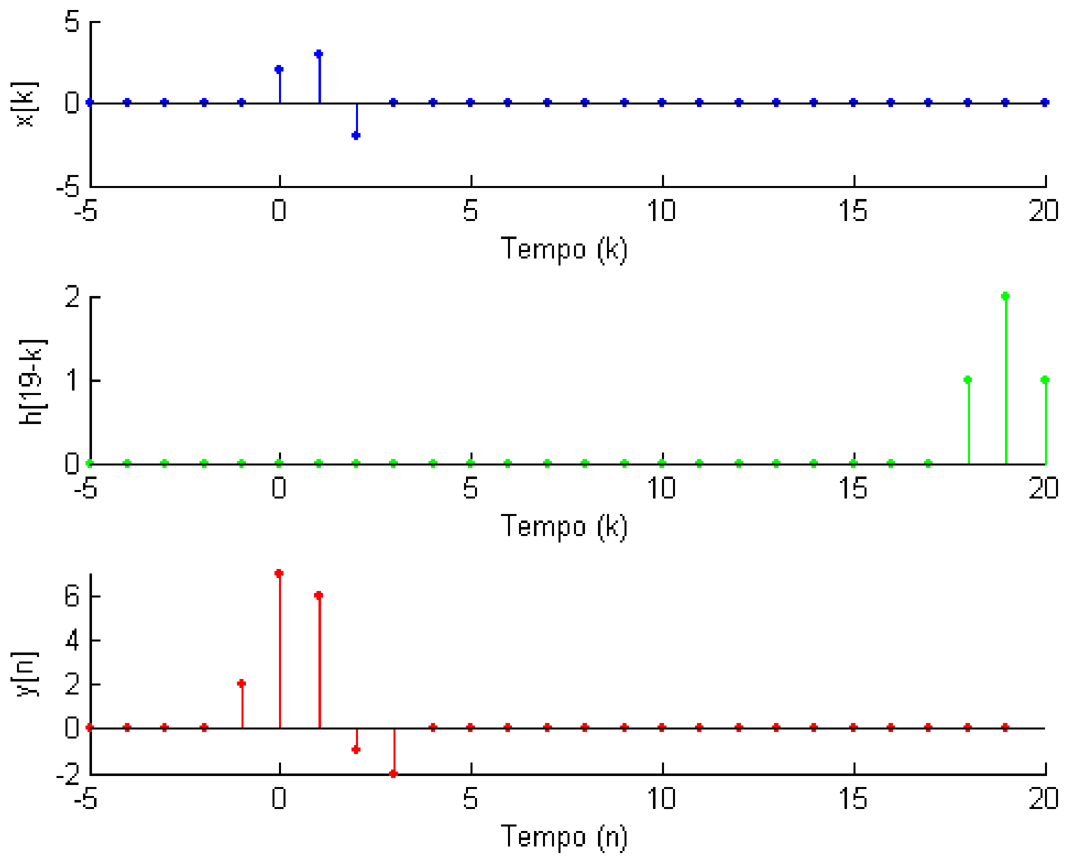


5
0
-5
x[k]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
2
1
0
h[17-k]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
6
4
2
0
-2
y[n]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (n)

n = 18

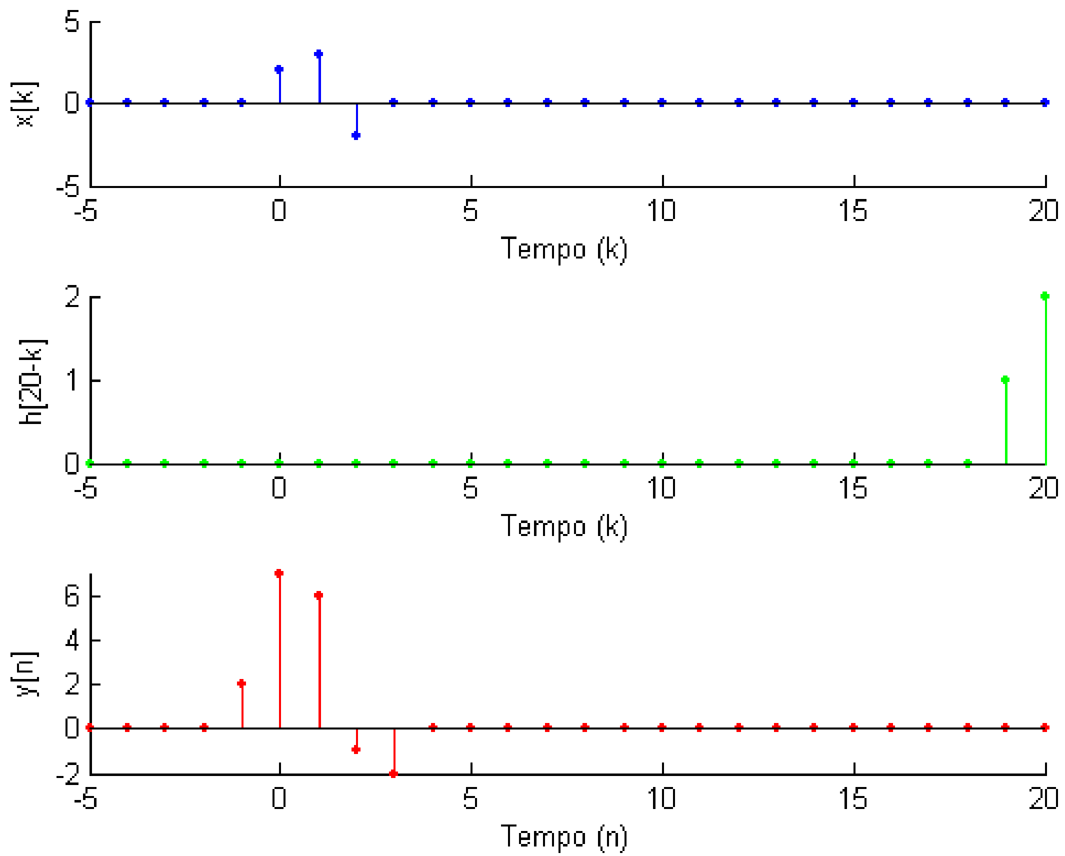

5
0
-5
x[k]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
2
1
0
h[18-k]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
6
4
2
0
-2
y[n]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (n)

$n = 19$

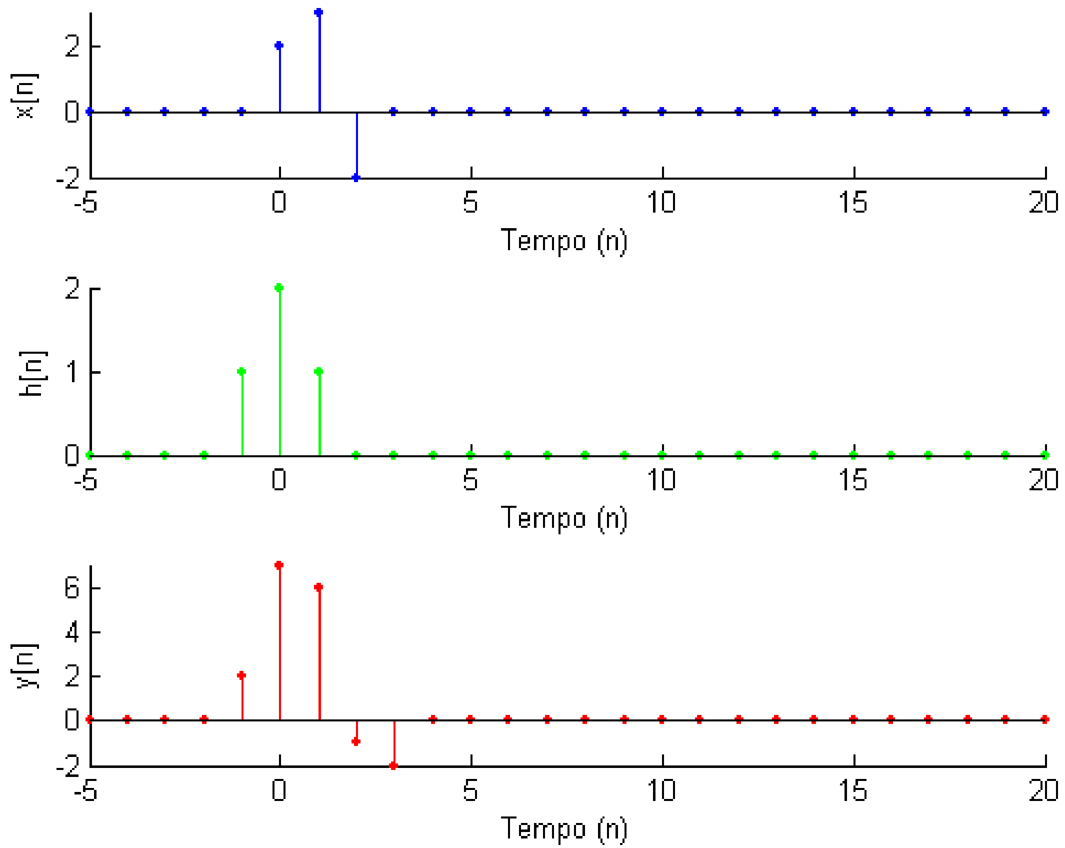


x[k]
5
0
-5
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
h[19-k]
2
1
0
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
y[n]
6
4
2
0
-2
-5
0
5
10
15
20
Tempo (n)

n = 20



Resumindo...



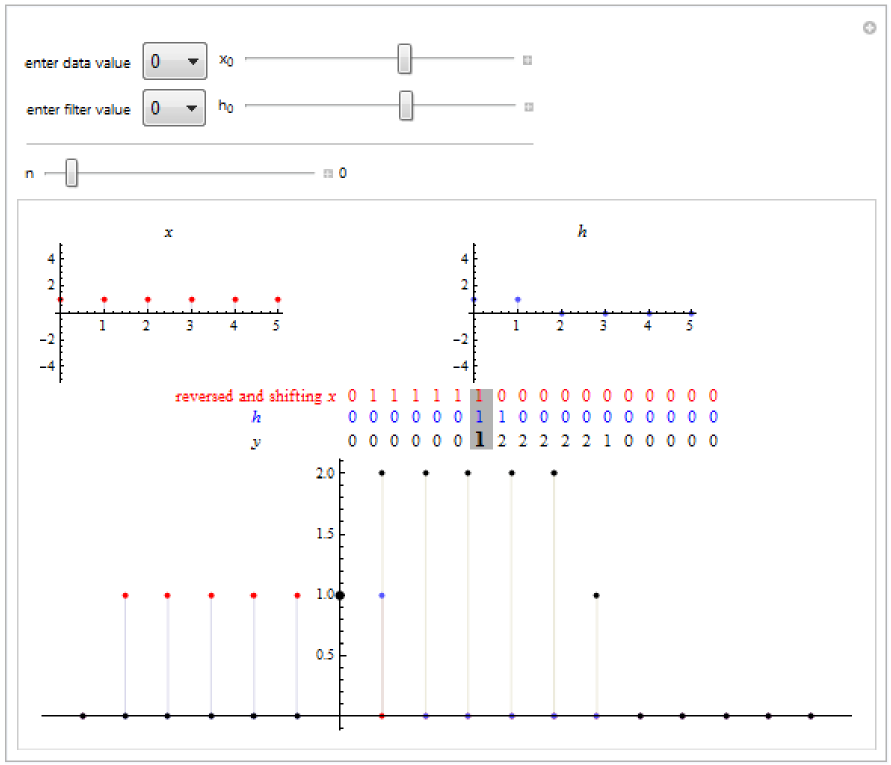
x[n]
2
0
-2
-5
0
5
10
15
20
Tempo (n)
h[n]
2
1
0
-5
0
5
10
15
20
Tempo (n)
y[n]
6
4
2
0
-2
-5
0
5
10
15
20
Tempo (n)

Boa Notícia!

VOCÊS JÁ PODEM FAZER A TERCEIRA LISTA DE EXERCÍCIOS SUGERIDOS...

Para Brincar ☺

Convolution Sum



"Convolution Sum" from the Wolfram Demonstrations Project

http://demonstrations.wolfram.com/ConvolutionSum/