

# Sinais e Sistemas

## Sistemas Lineares Invariantes no Tempo

Renato Dourado Maia

Universidade Estadual de Montes Claros

Engenharia de Sistemas



# Introdução

---



$h(t), h[n]$   $\longrightarrow$  Resposta do sistema quando a entrada é um impulso unitário,  $\delta(t), \delta[n]$ .

A **Resposta ao Impulso** caracteriza um sistema LTI: dada uma entrada  $x$ , pode-se, conhecendo-se  $h$ , determinar-se  $y$ . Esse método é denominado **Convolução**.

# Sinais Discretos e Soma de Impulsos

□ Seja o seguinte sinal:  $x[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ -1, & n = 2 \\ 2, & n = 5 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

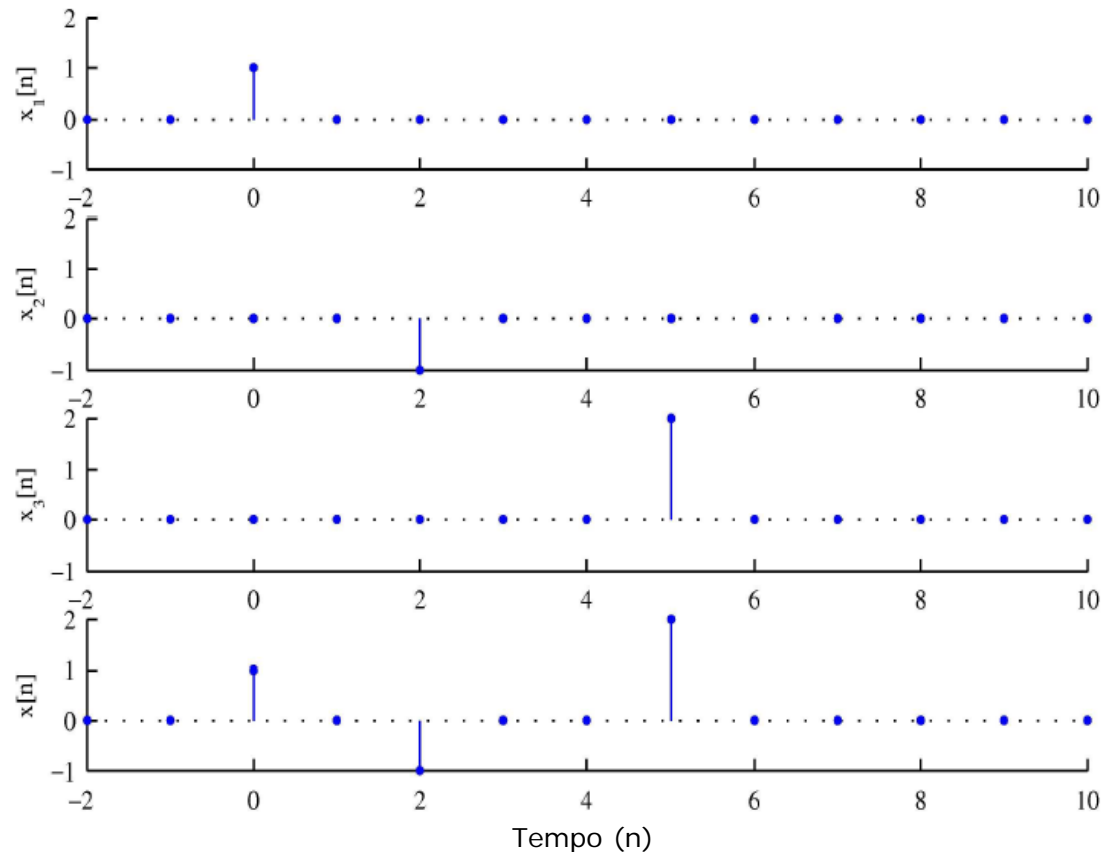
O sinal pode ser escrito como uma soma de impulsos?



**SIM!!!**  $\longrightarrow x[n] = 1\delta[n] - 1\delta[n - 2] + 2\delta[n - 5] = x_1[n] + x_2[n] + x_3[n]$

# Sinais Discretos e Soma de Impulsos

$$x[n] = 1\delta[n] - 1\delta[n - 2] + 2\delta[n - 5] = x_1[n] + x_2[n] + x_3[n]$$



# Sinais Discretos e Soma de Impulsos

---

- Todo sinal discreto limitado pode ser escrito como uma soma ponderada de impulsos unitários deslocados no tempo:

Impulso Deslocado

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[n-k]$$

Peso

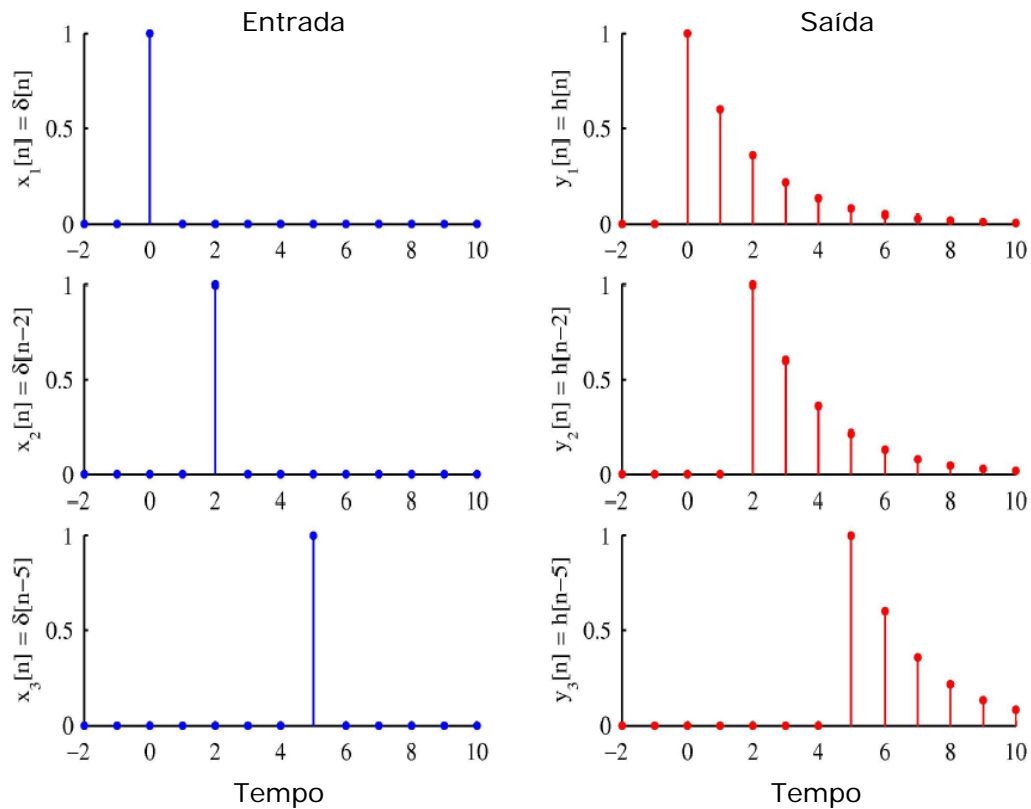
# Lembrando...

## □ Linearidade:



# Lembrando...

## □ Invariância no Tempo:



# Somatório de Convolução

- Retomando o exemplo:

$$x[n] = 1\delta[n] - 1\delta[n-2] + 2\delta[n-5] = x_1[n] + x_2[n] + x_3[n]$$

Considerando a **LINEARIDADE** e a **INVARIÂNCIA NO TEMPO**:

$$y[n] = y_1[n] + y_2[n] + y_3[n]$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1[n] = \delta[n] \rightarrow y_1[n] = 1h[n] \\ x_2[n] = -\delta[n-2] \rightarrow y_2[n] = -1h[n-2] \\ x_3[n] = 2\delta[n-5] \rightarrow y_3[n] = 2h[n-5] \end{array} \right\} y[n] = 1h[n] - 1h[n-2] + 2h[n-5]$$

A saída é uma soma ponderada das saídas devidas a cada entrada, ou seja, um somatório de respostas ao impulso deslocadas e ponderadas!



# Somatório de Convolução

- **Generalizando** para qualquer sinal discreto limitado:

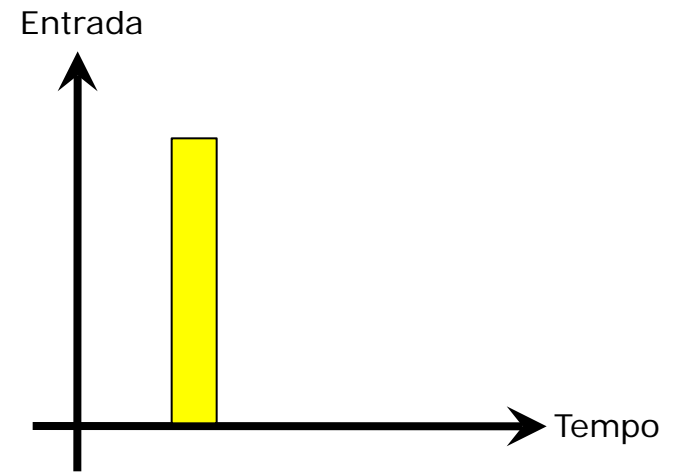
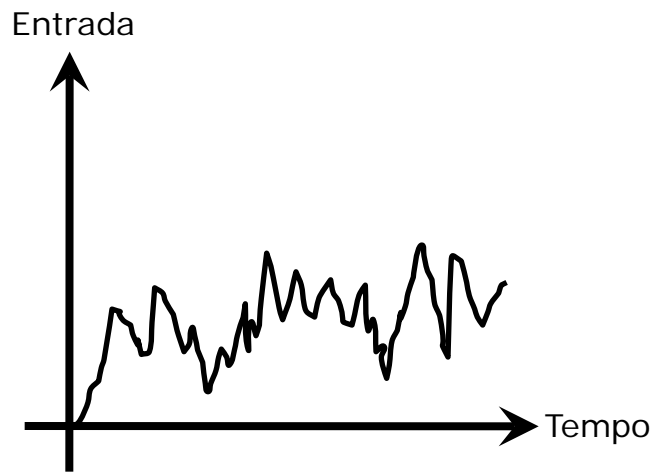
$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[n-k] \longrightarrow \text{Sinal Discreto Limitado}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

→ Somatório de Convolução

**UM SISTEMA LTI É COMPLETAMENTE CARACTERIZADO POR SUA RESPOSTA AO IMPULSO UNITÁRIO!!!**

# Reflexão



# Somatório de Convolução – Resumo

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

$$\delta[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow h[n]$$

→ Definição de  $h[n]$

$$\delta[n-k] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow h[n-k]$$

→ Invariância no Tempo

$$x[k]\delta[n-k] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow x[k]h[n-k]$$

→ Linearidade

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

→ Linearidade

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

→ Definição de  $\delta[n]$

# Somatório de Convolução

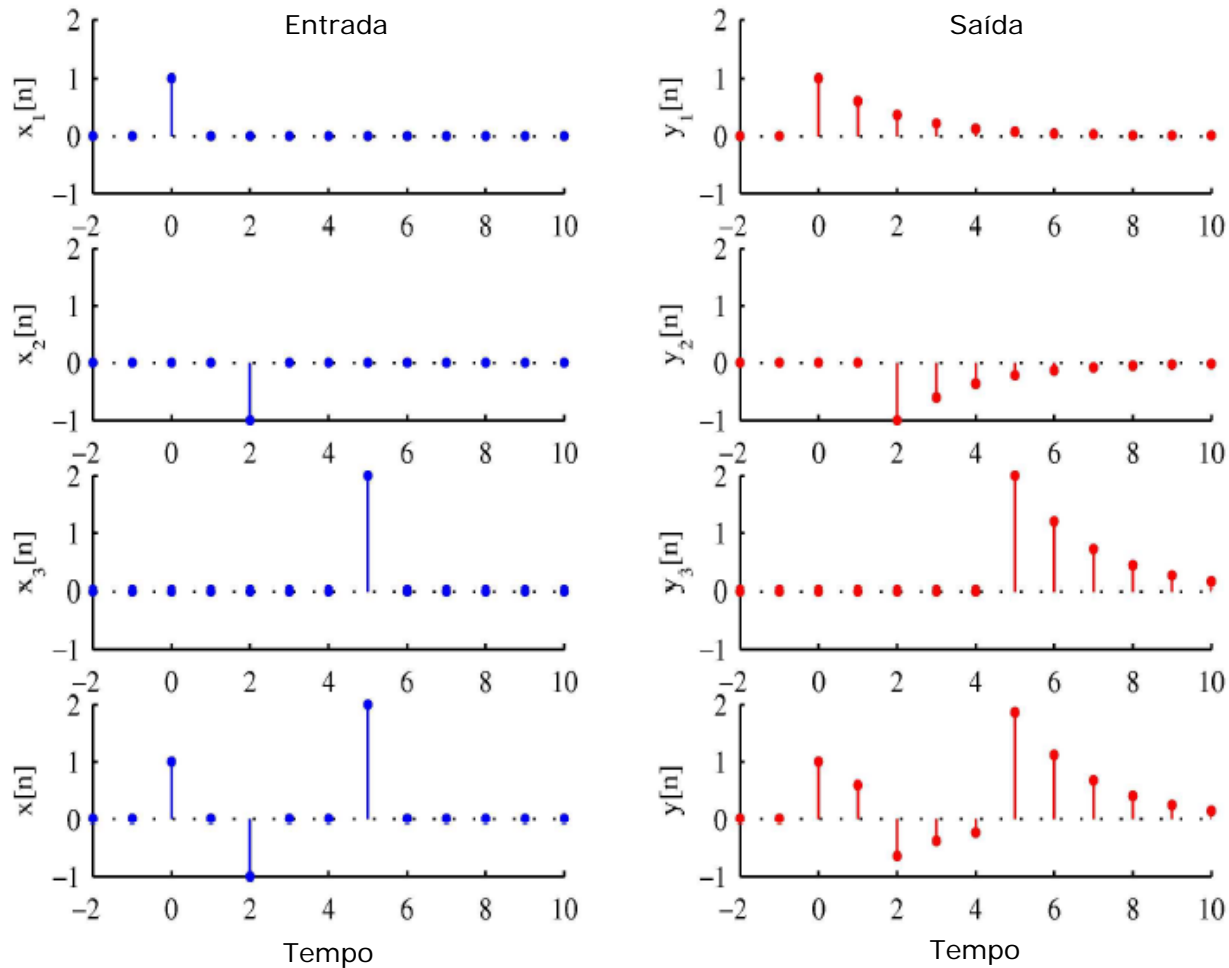
---

Exemplo

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ -1, & n = 2 \\ 2, & n = 5 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$h[n] = a^n u[n] = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}, \text{ com } a = 0,6$$

# Somatório de Convolução



# Somatório de Convolução

---

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]h[k]$$

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[-k] \quad y[1] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[-k+1] \quad y[2] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[-k+2] \dots$$

O que acontece para cada valor de  $n$ , se imaginarmos os sinais em função da variável  $k$ ?



Vejamos uma animação em Java para compreendermos a segunda interpretação do somatório de convolução: rebate, desloca, multiplica e soma...

# Somatório de Convolução

---

Exemplo – O Mesmo ☺

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ -1, & n = 2 \\ 2, & n = 5 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$h[n] = a^n u[n] = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}, \text{ com } a = 0,6$$

# Somatório de Convolução

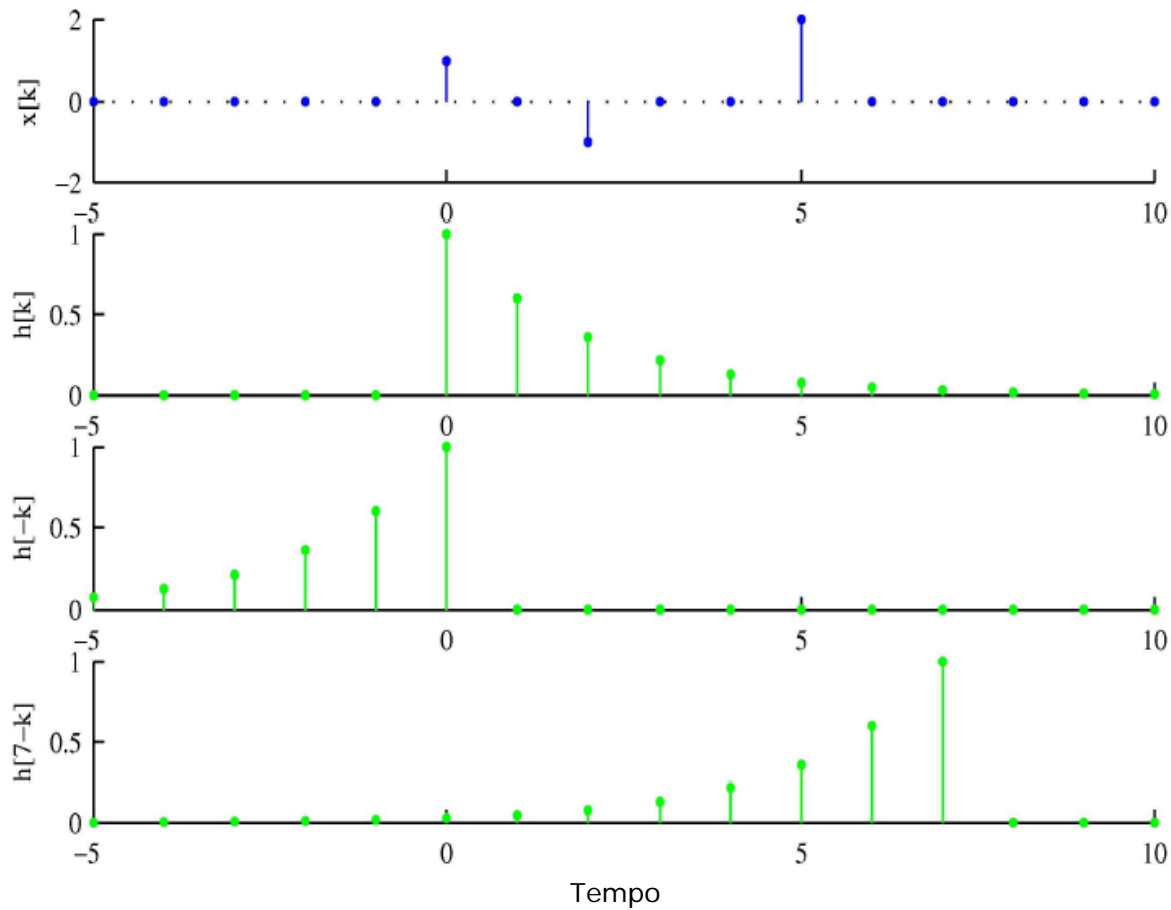
---

- Vamos observar graficamente a resolução do exemplo utilizando a interpretação **rebate, desloca, multiplica e soma**.

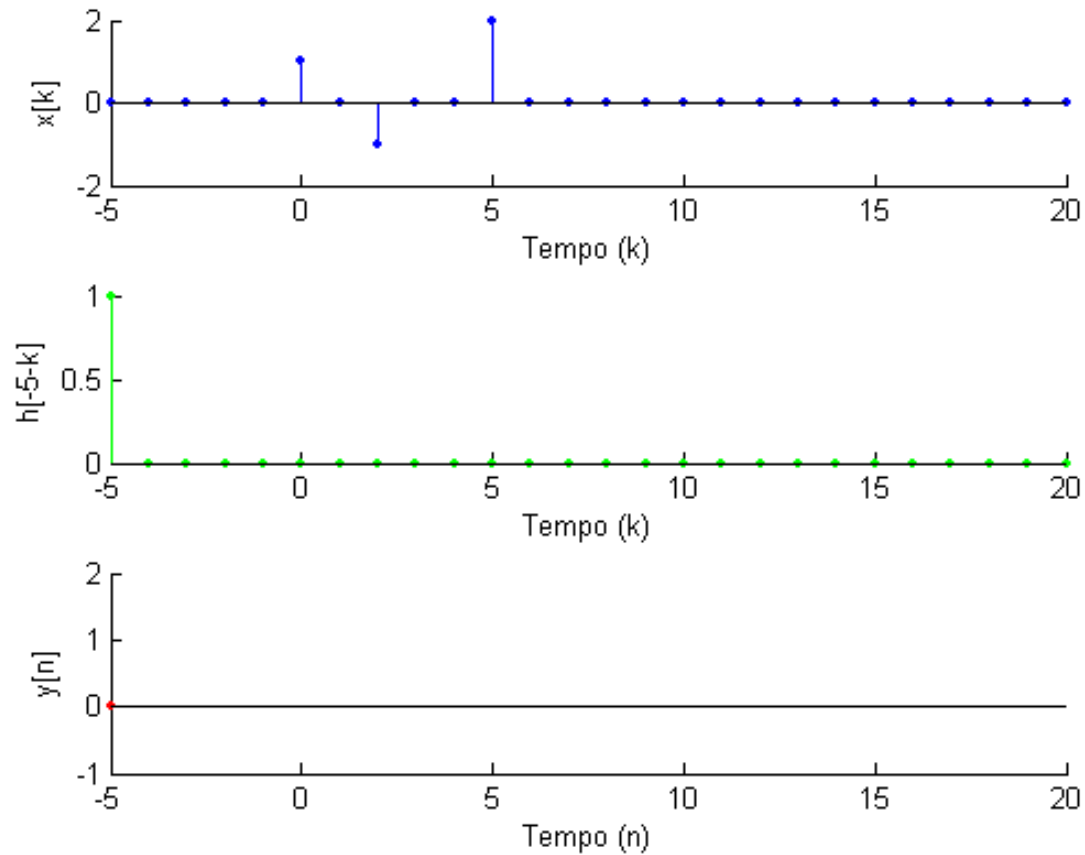
 Script: M\_6\_SistemasLTIProg1.m



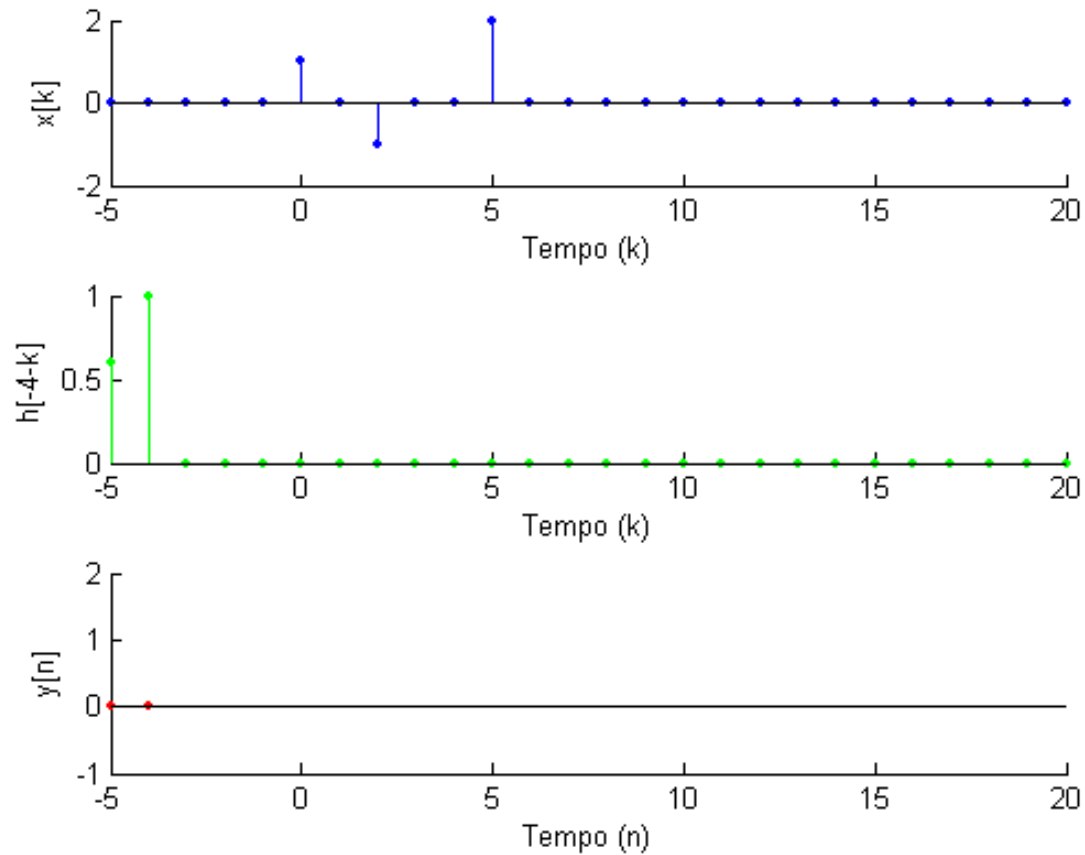
# Somatório de Convolução



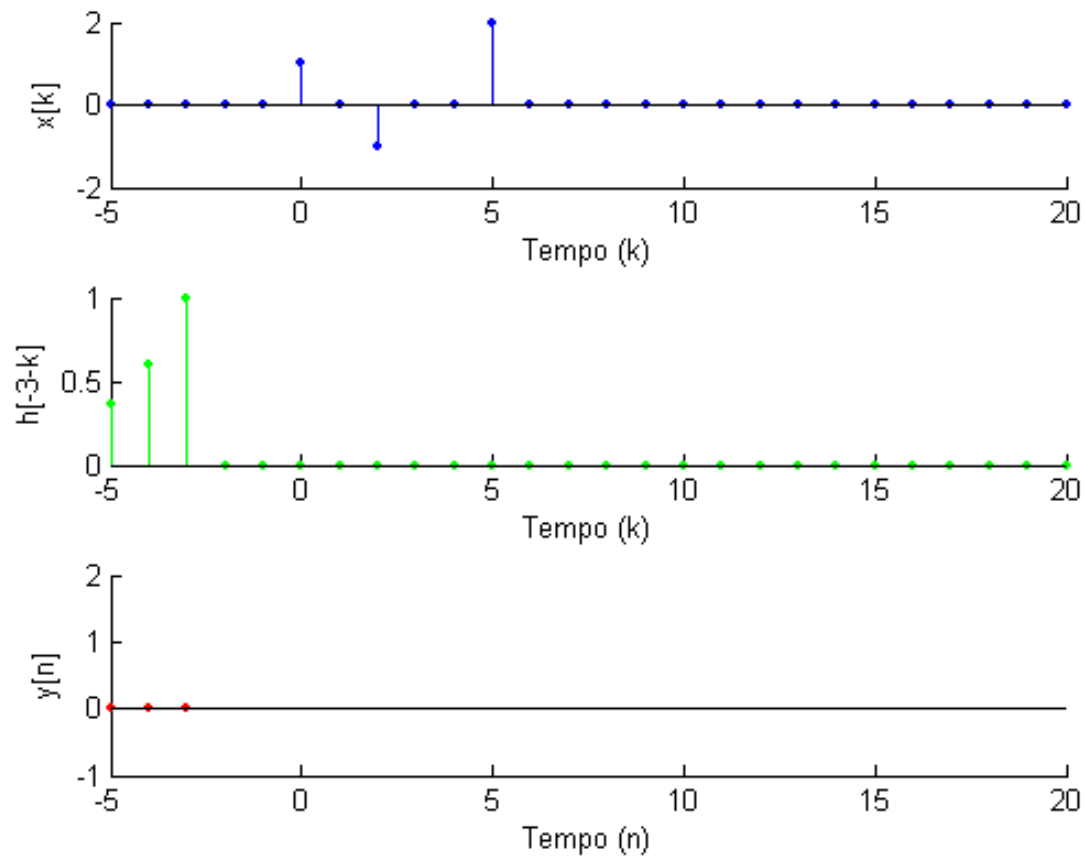
$$n = -5$$



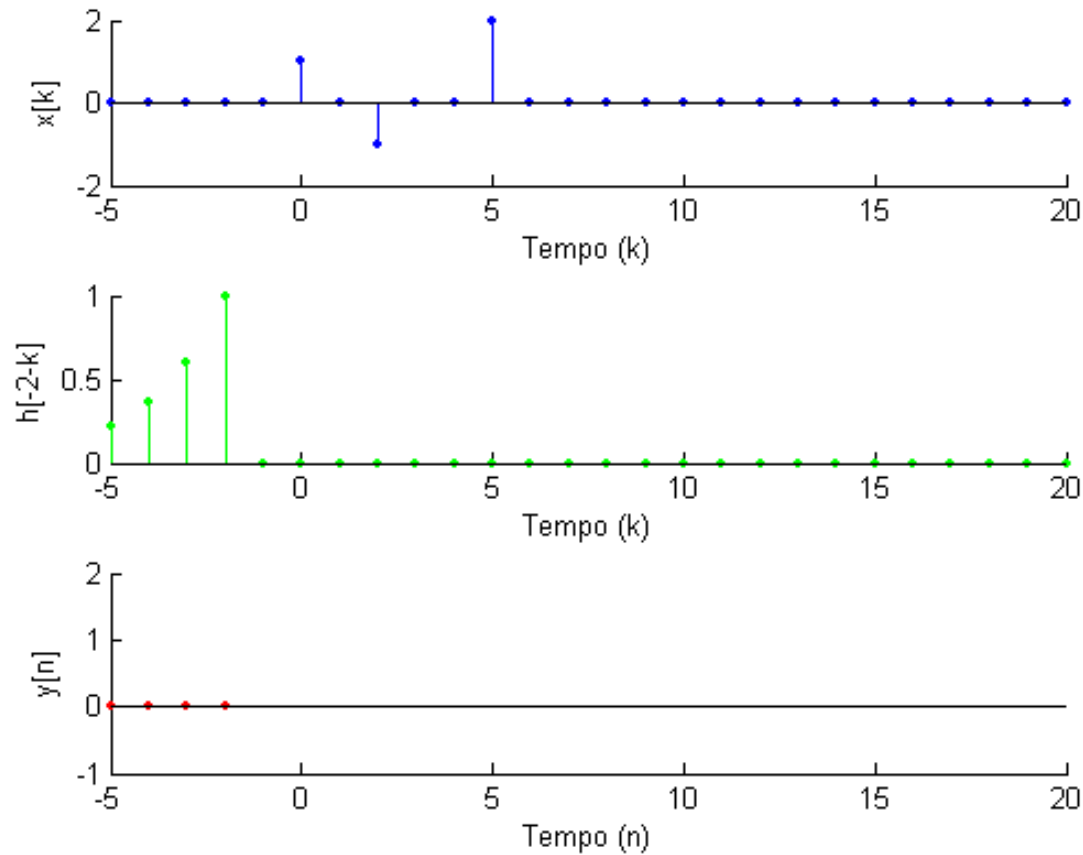
$$n = -4$$



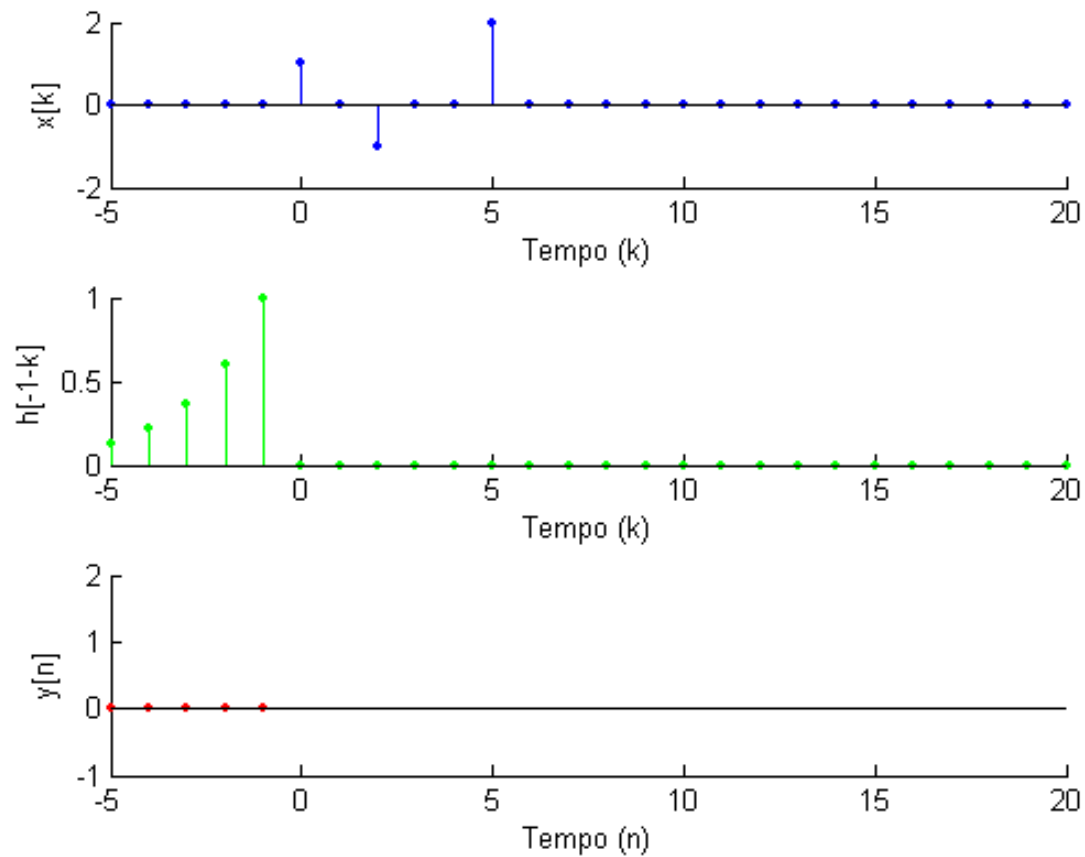
$$n = -3$$



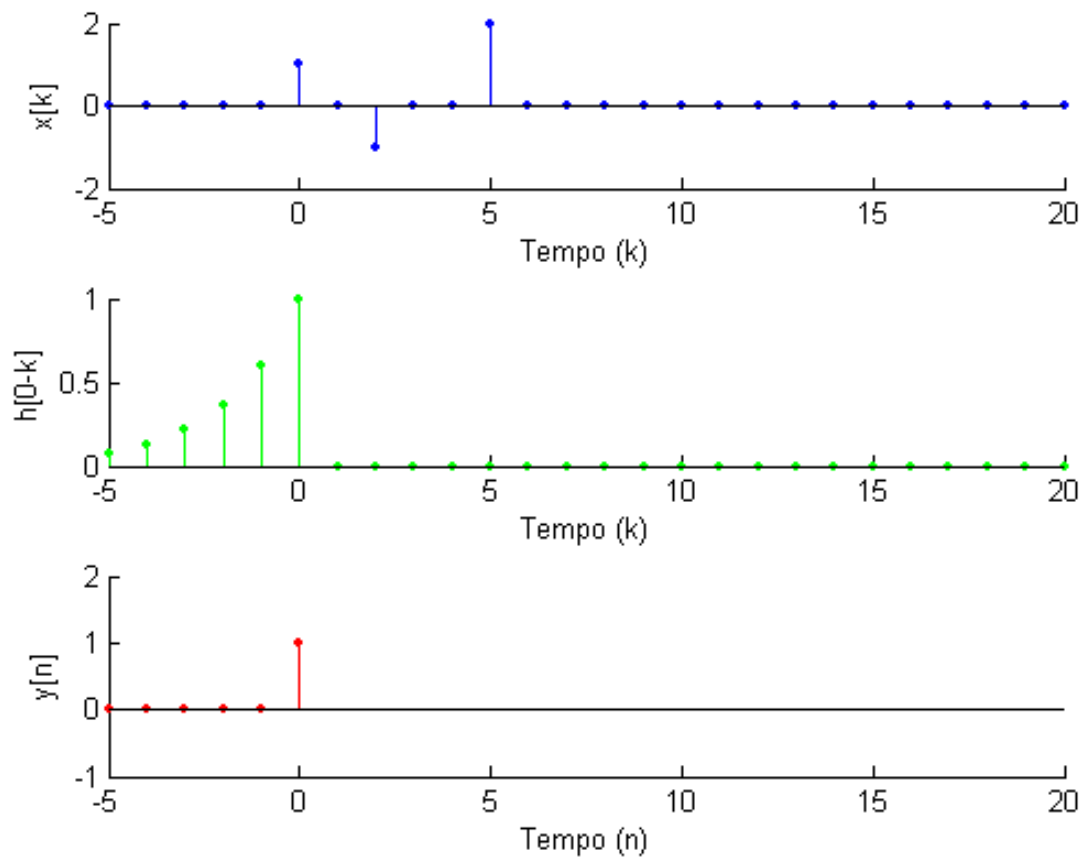
$$n = -2$$



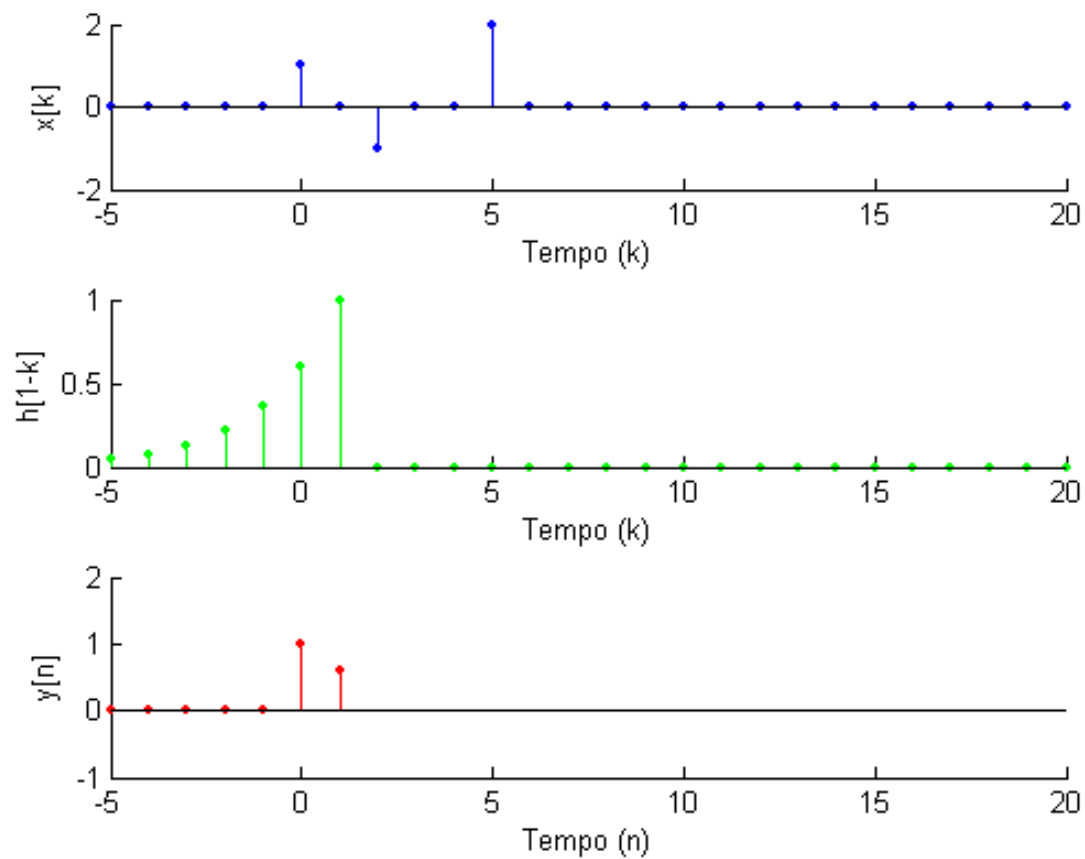
$$n = -1$$



$$n = 0$$

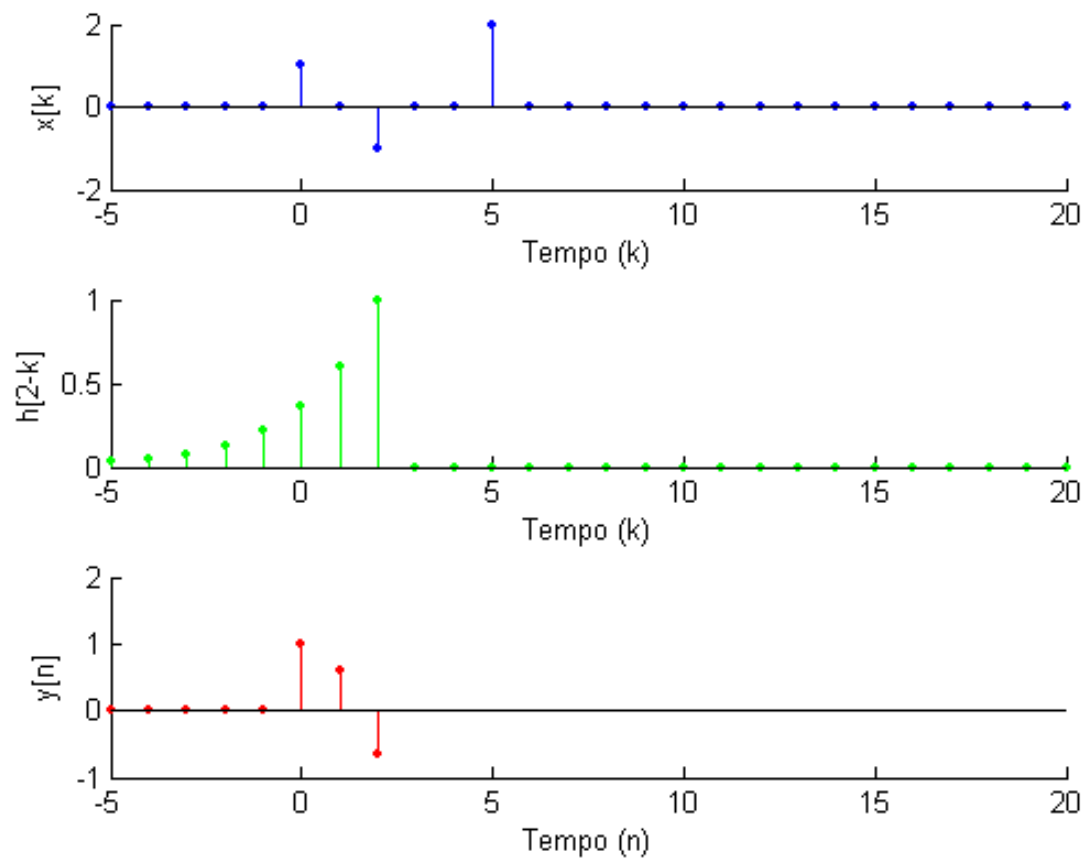


$$n = 1$$

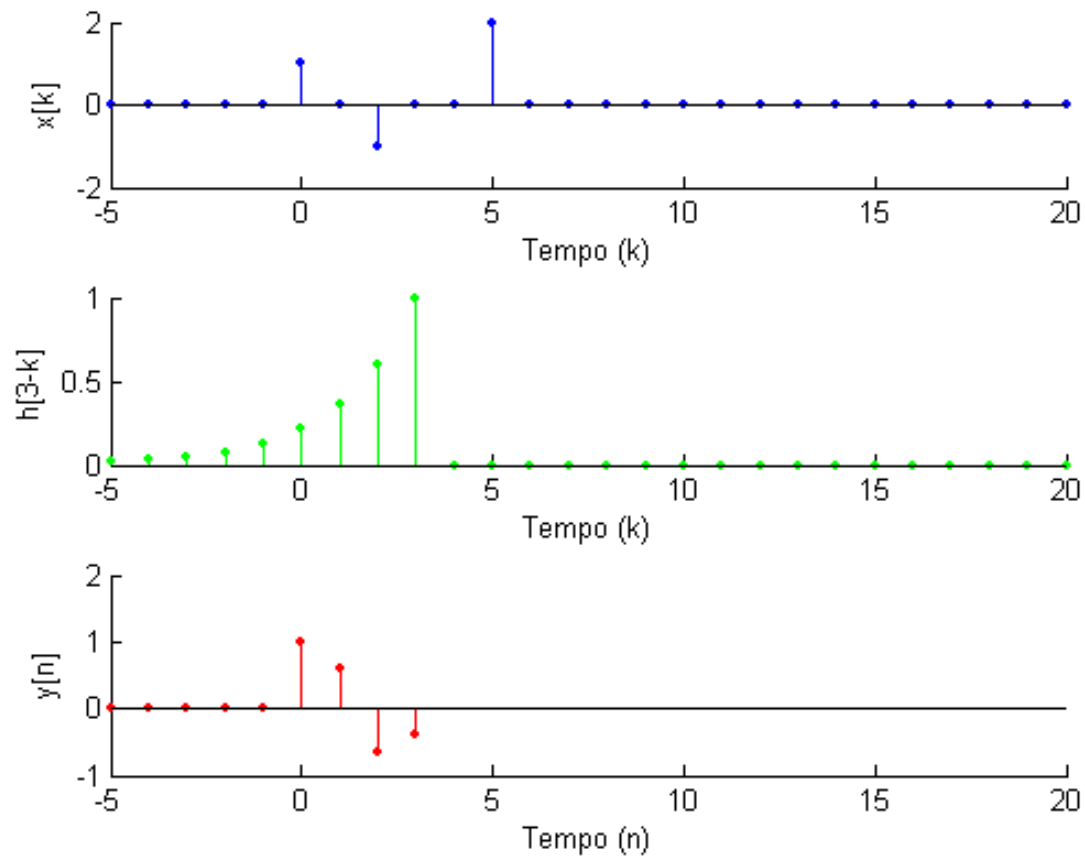




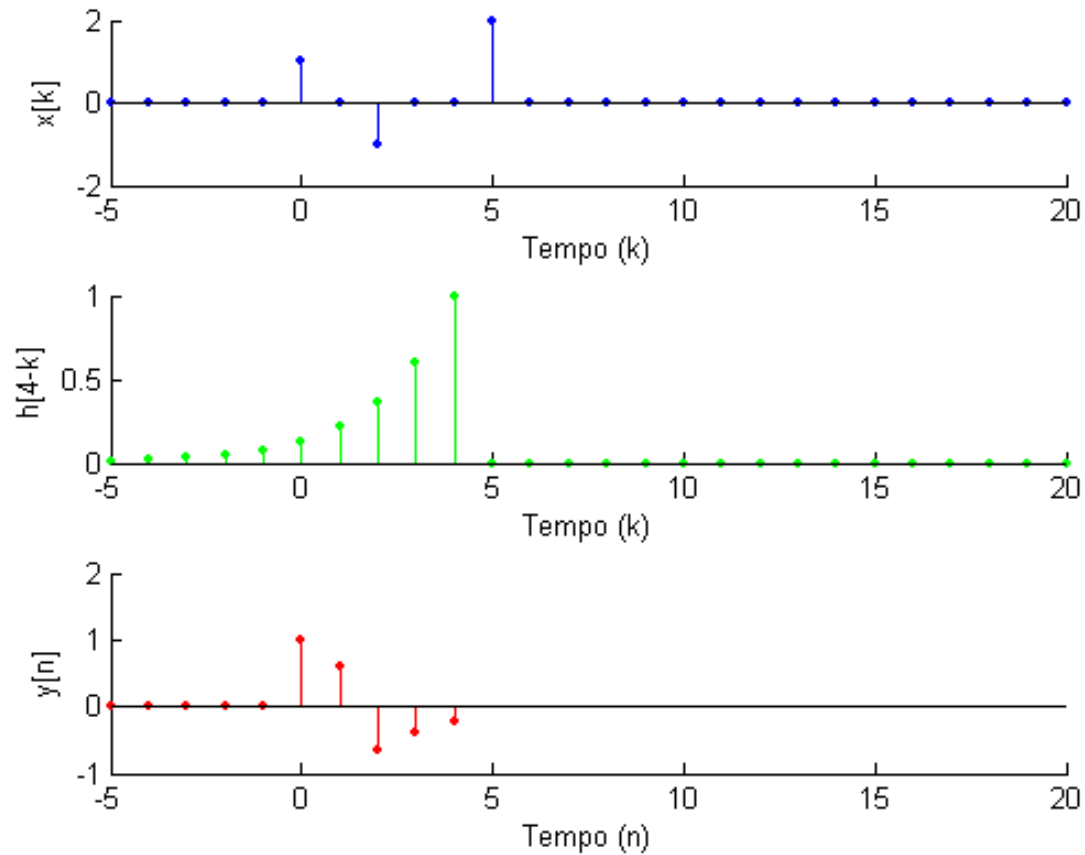
$$n = 2$$



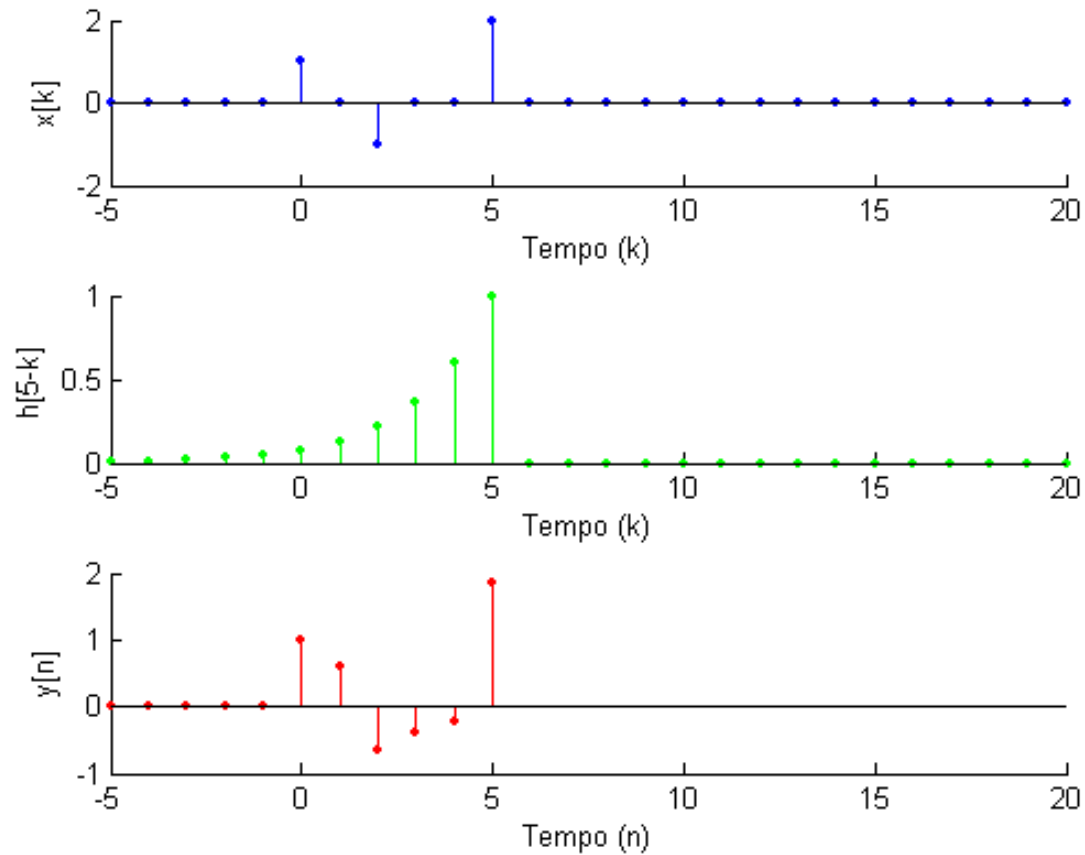
$$n = 3$$



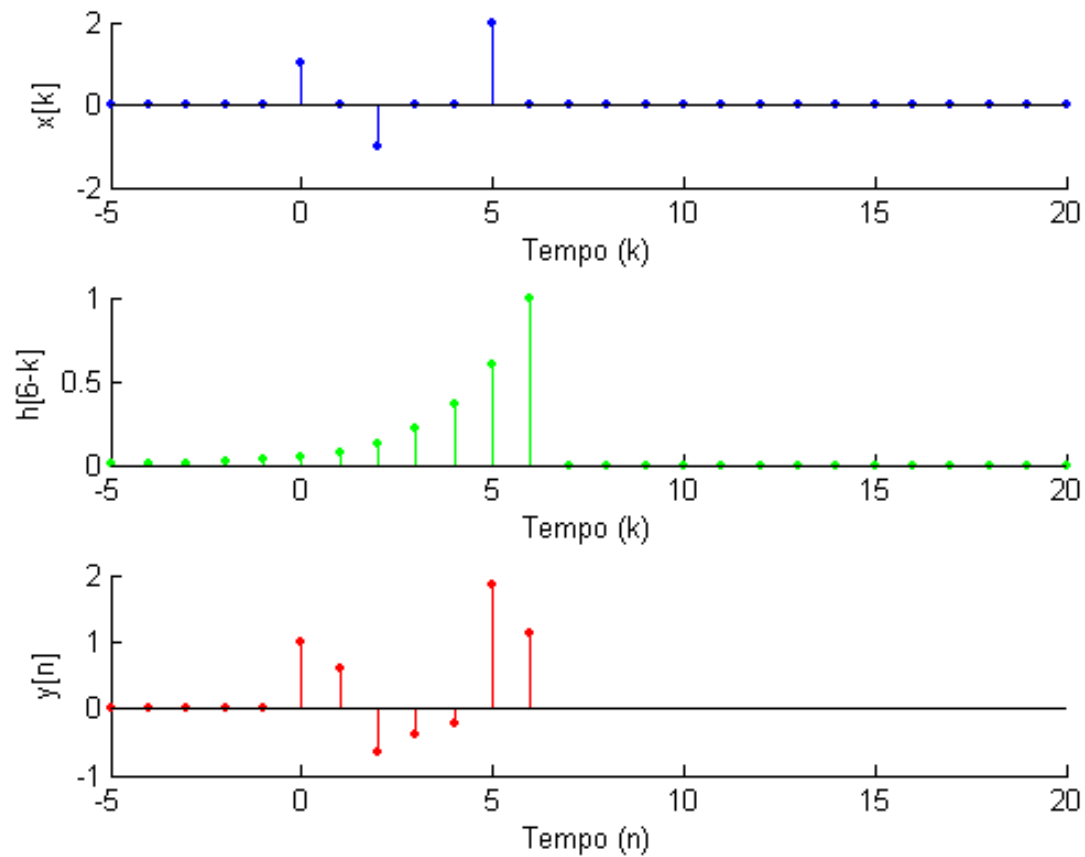
$$n = 4$$



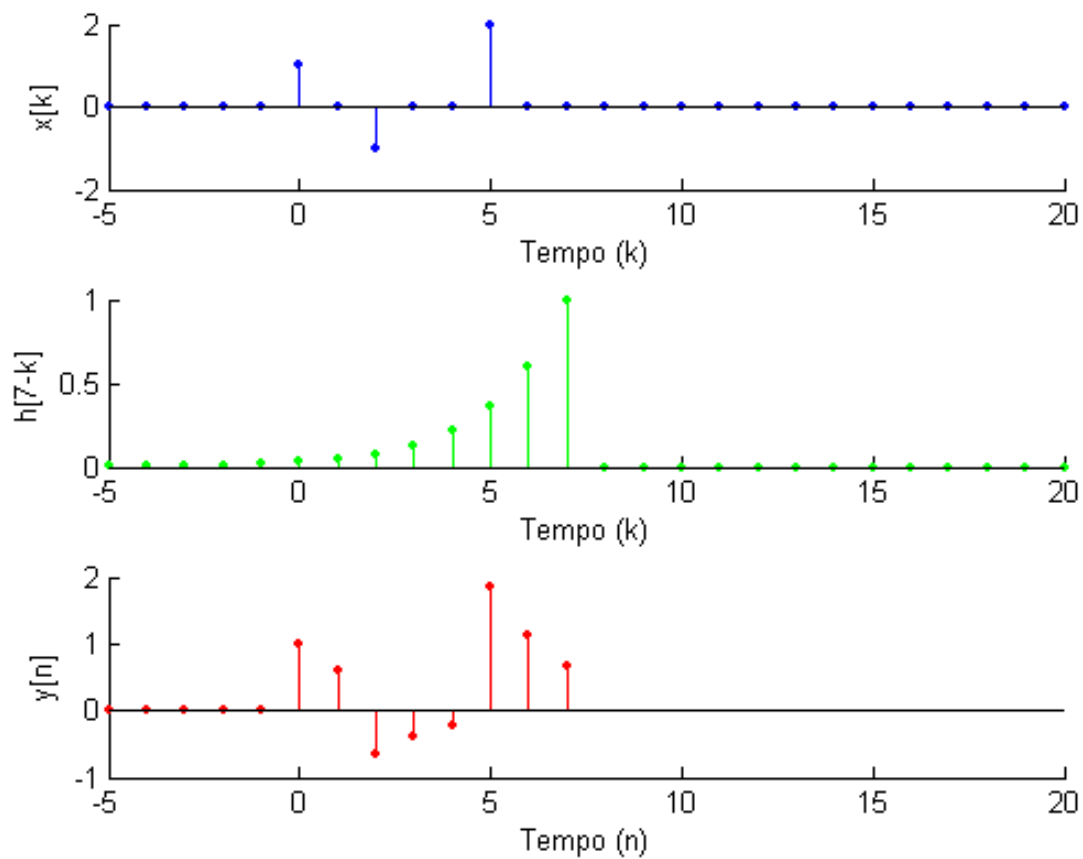
$$n = 5$$



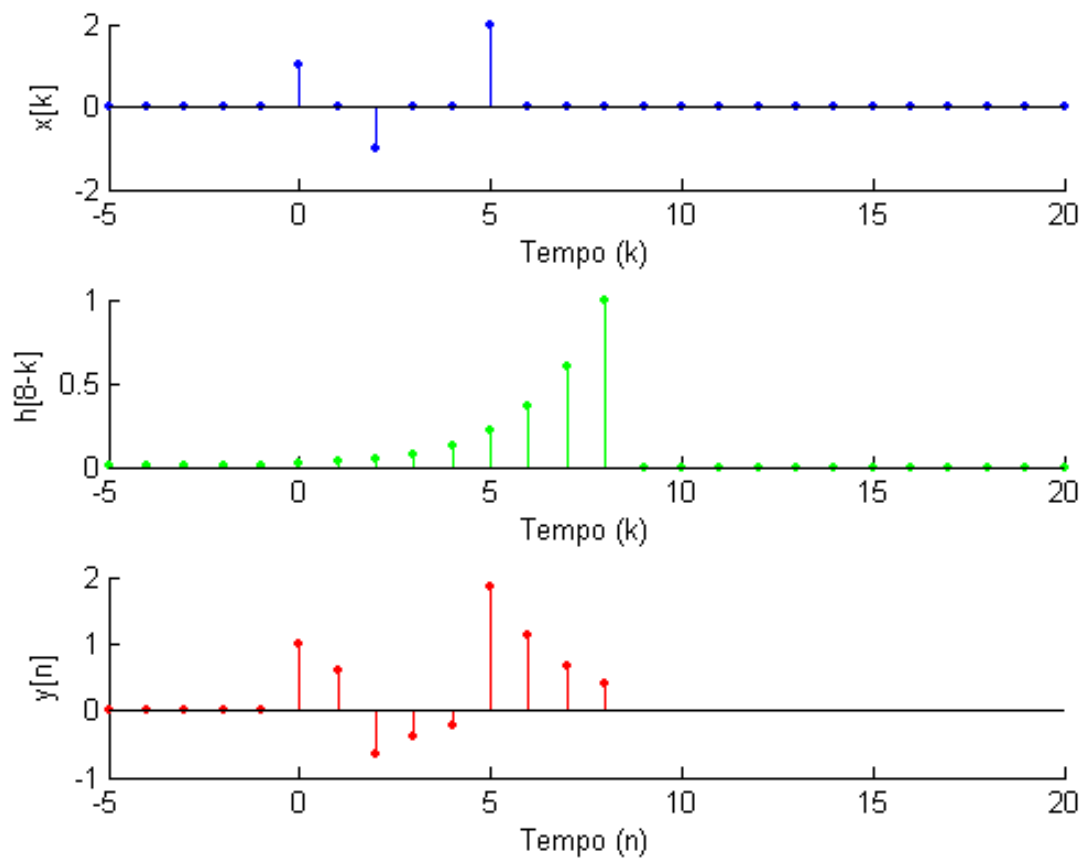
$$n = 6$$



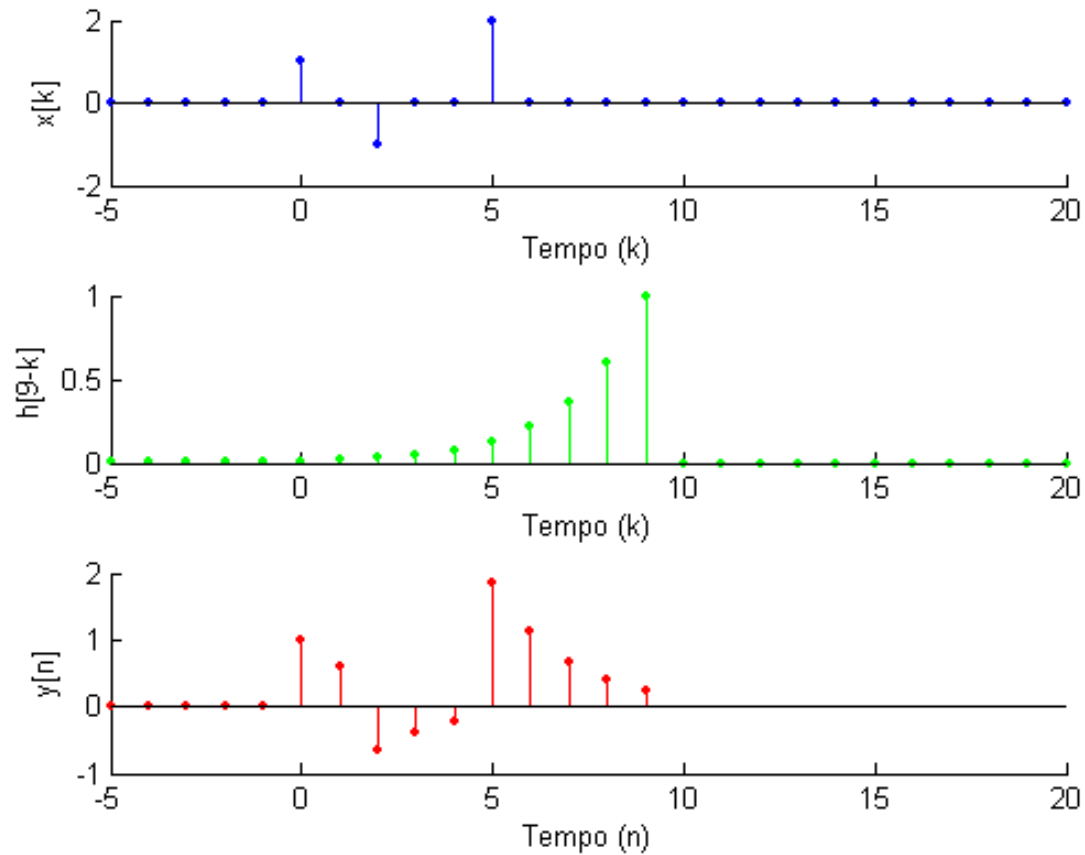
$$n = 7$$



$$n = 8$$

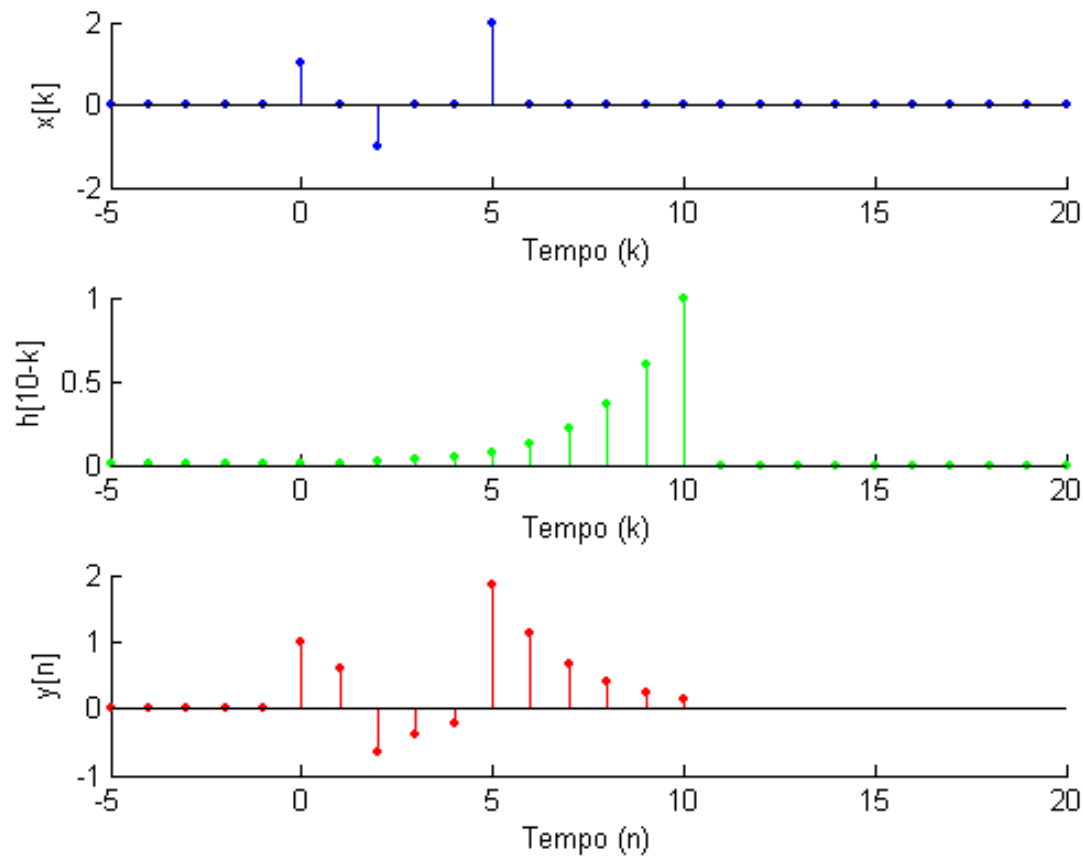


$$n = 9$$

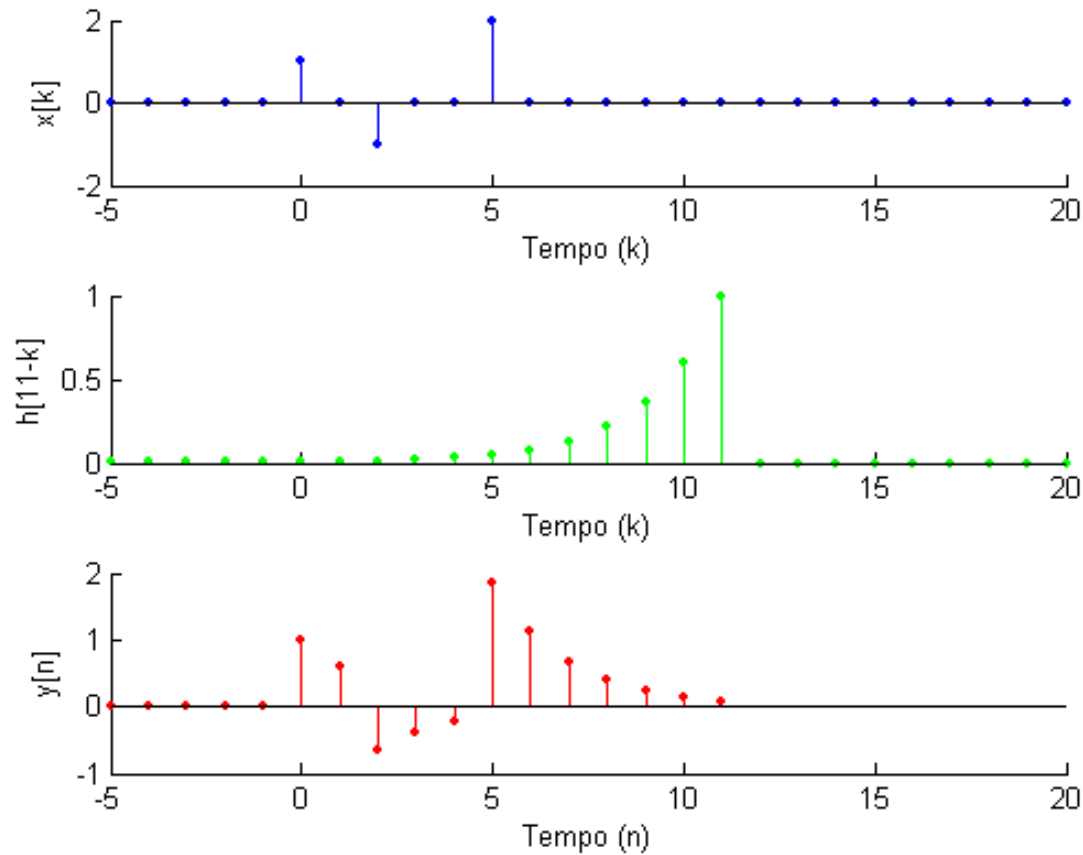




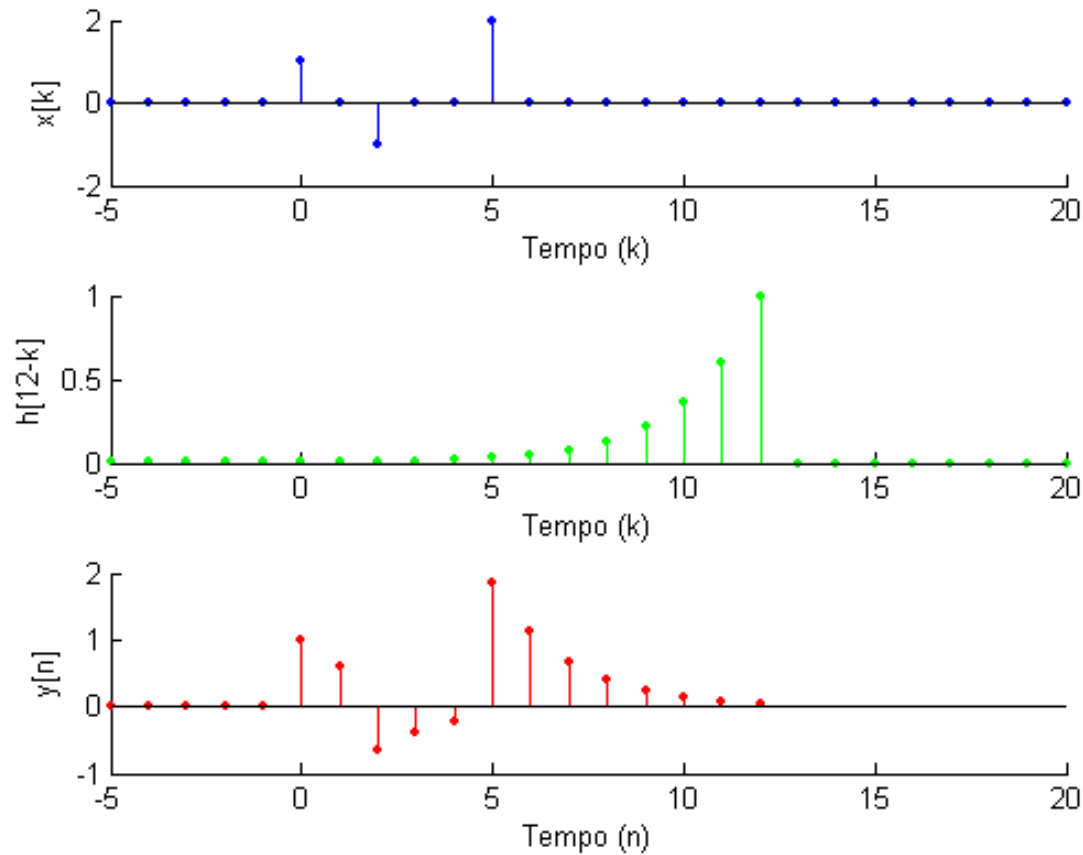
$$n = 10$$



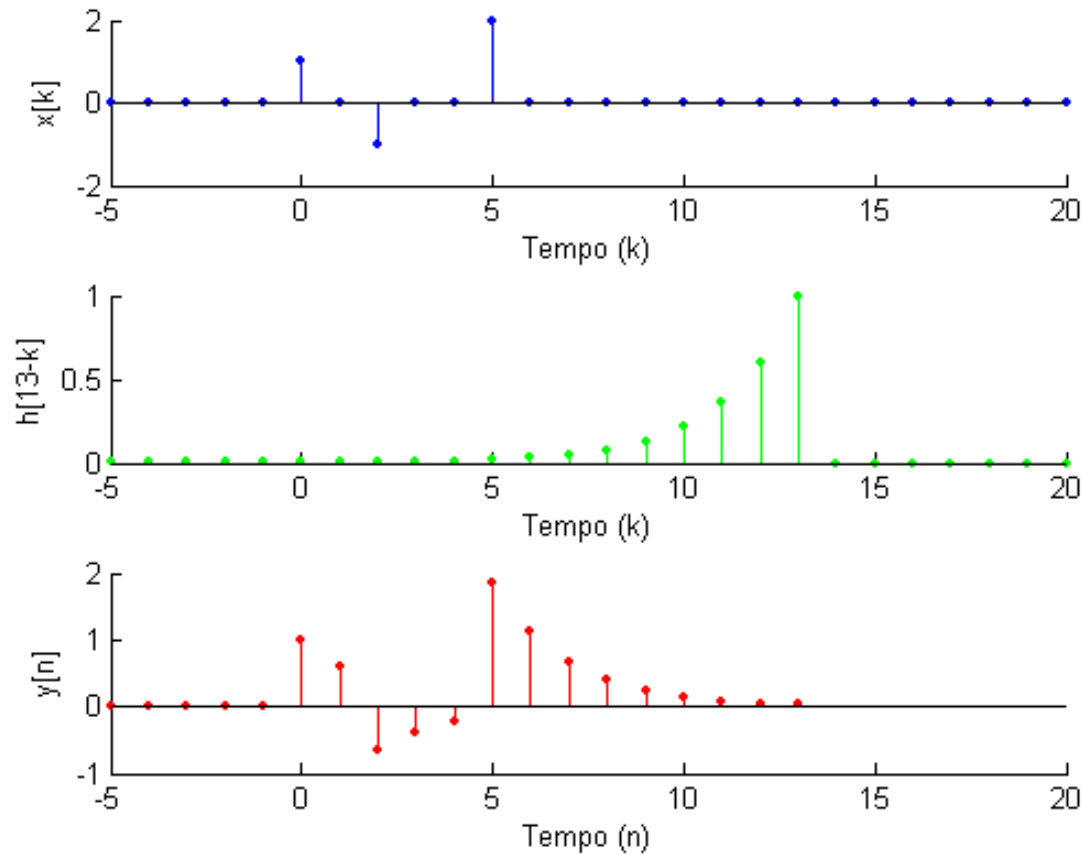
$$n = 11$$



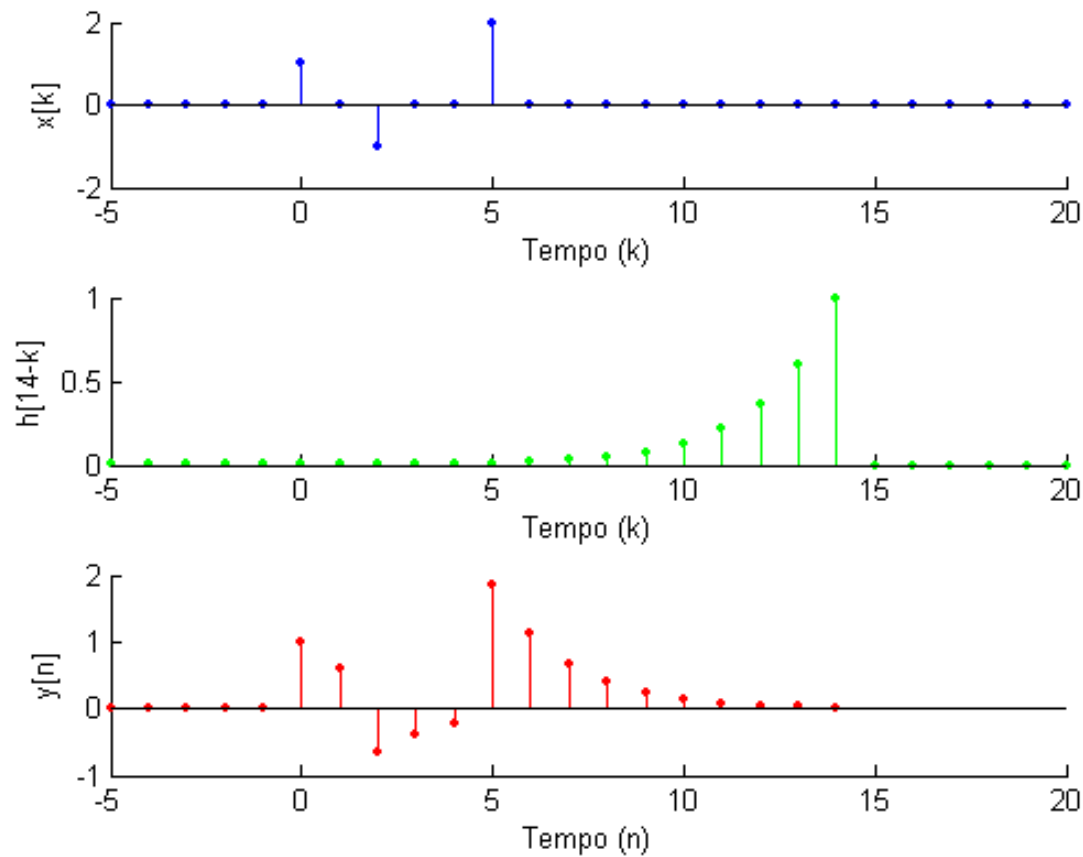
$$n = 12$$



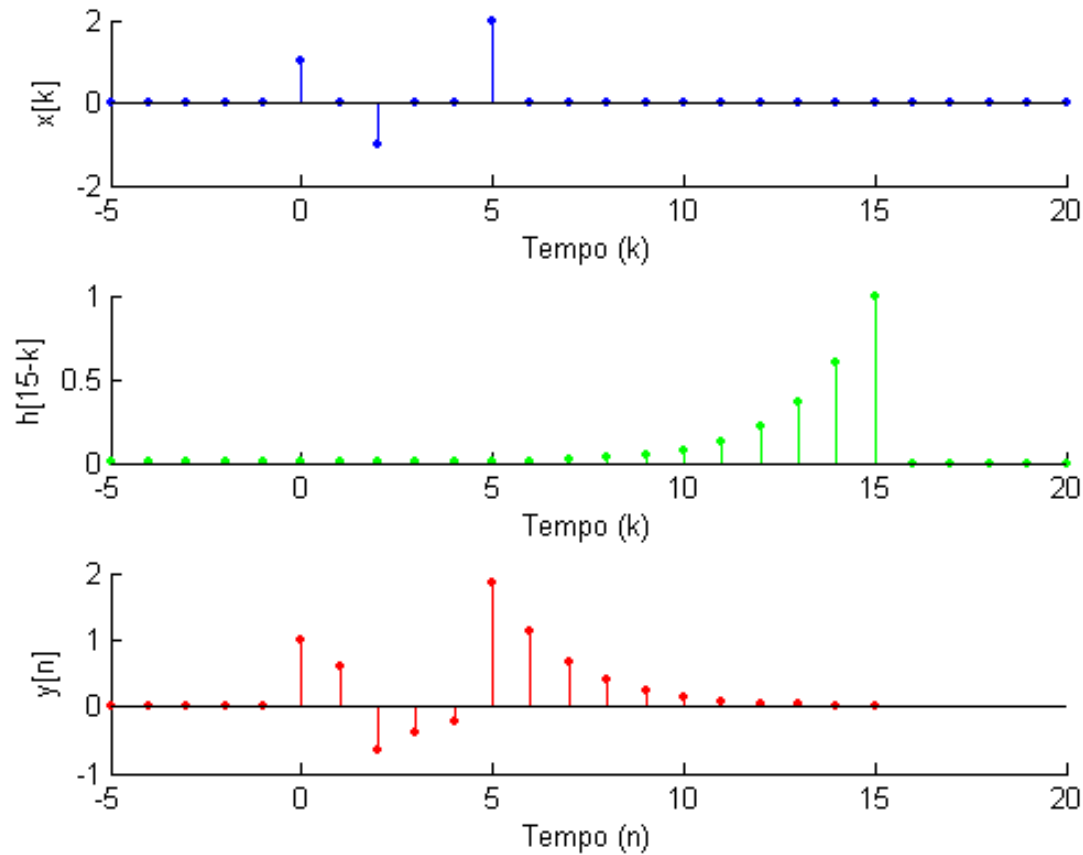
$$n = 13$$



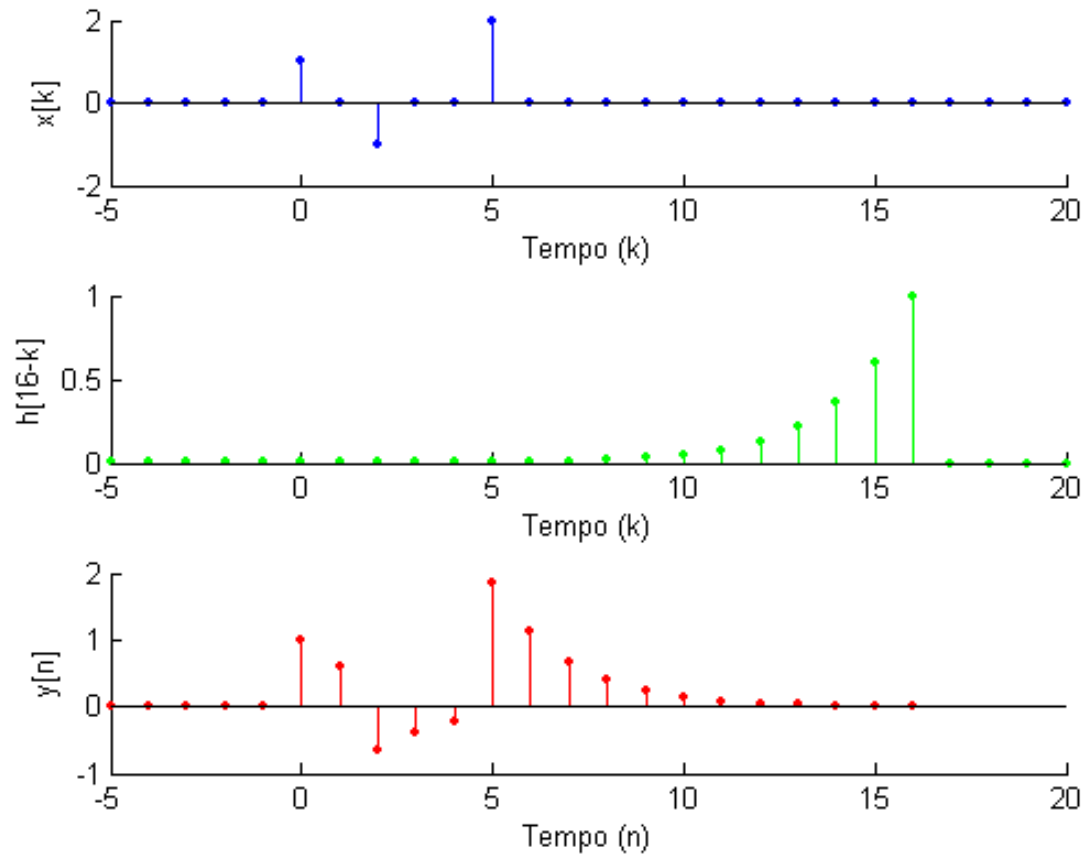
$$n = 14$$



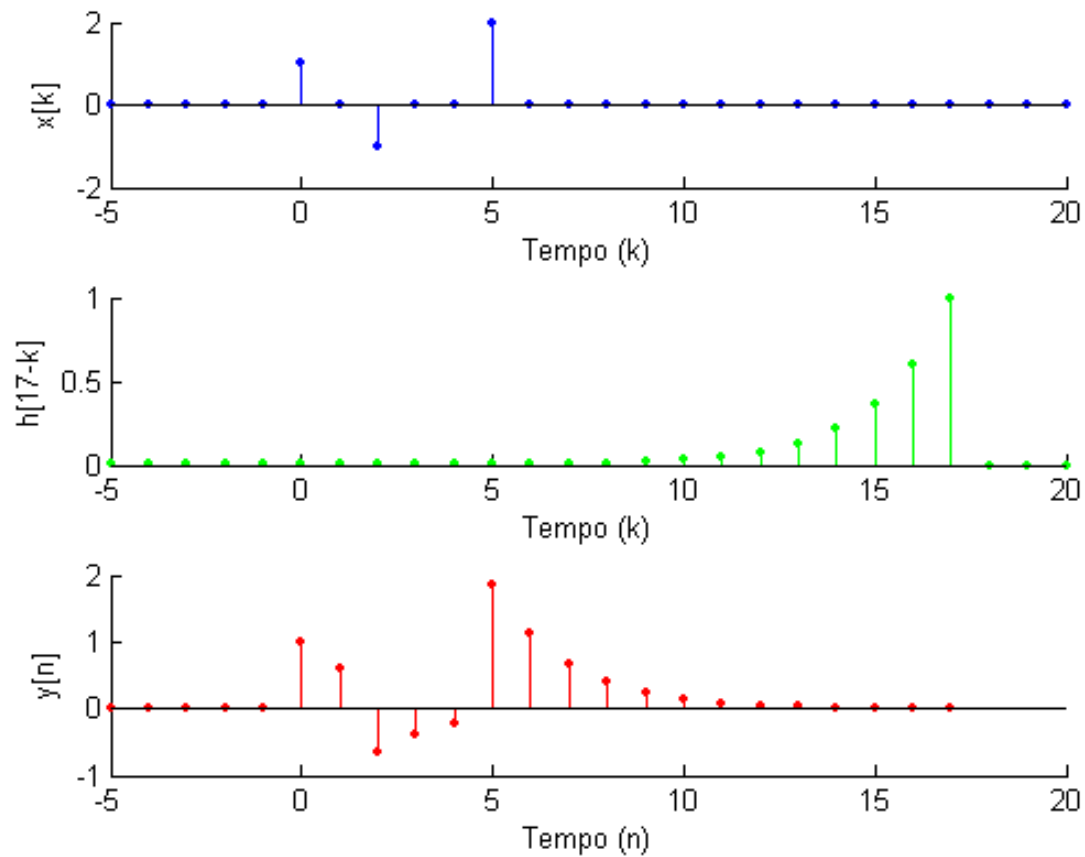
$$n = 15$$



$$n = 16$$

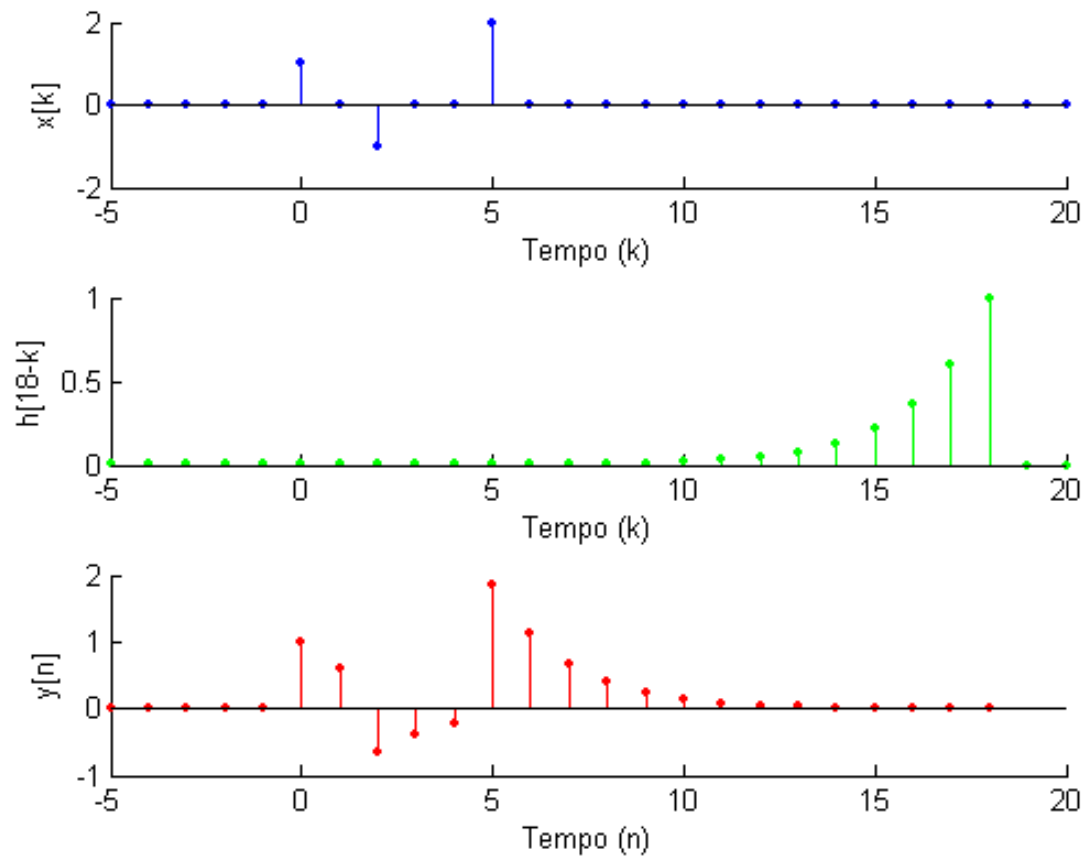


$$n = 17$$

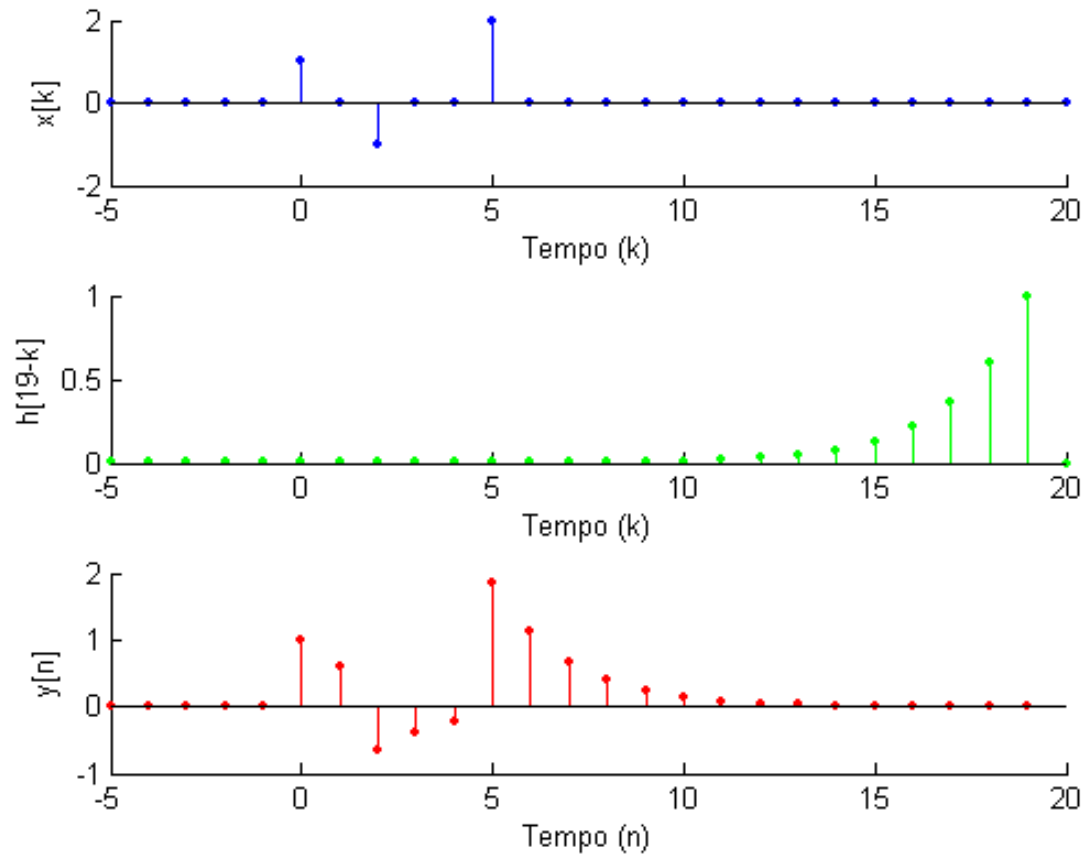




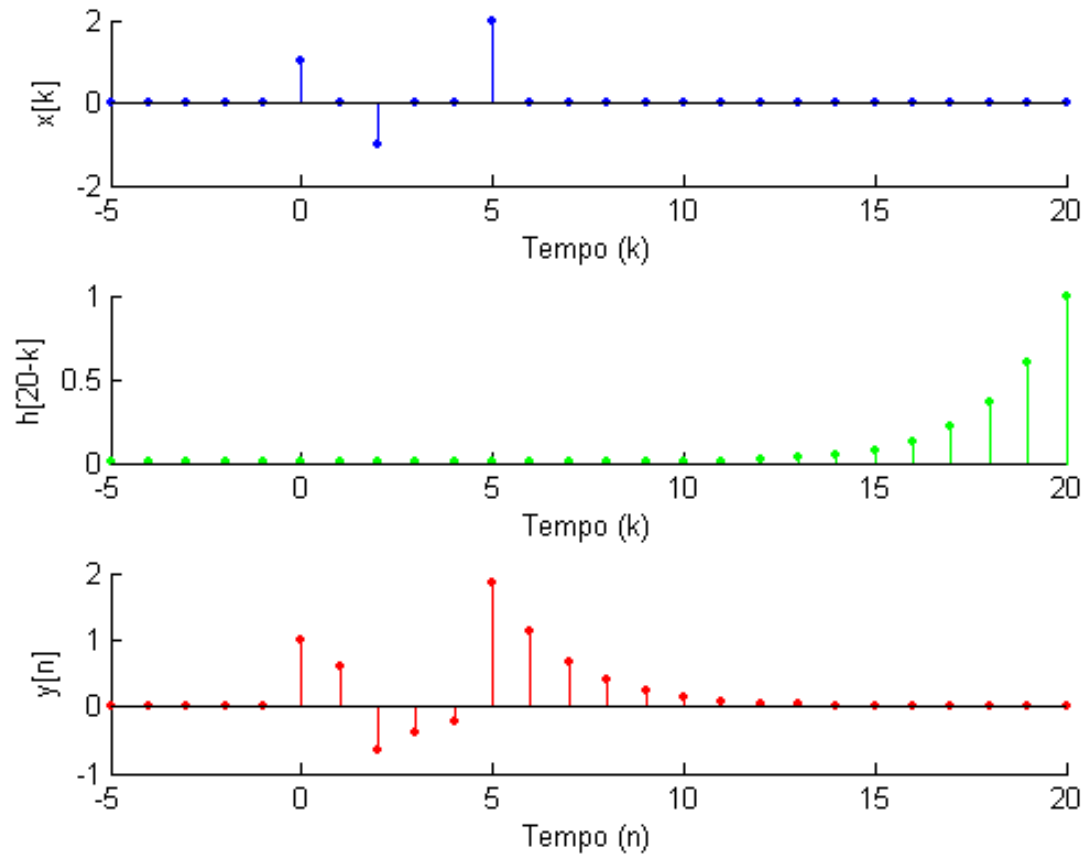
$$n = 18$$



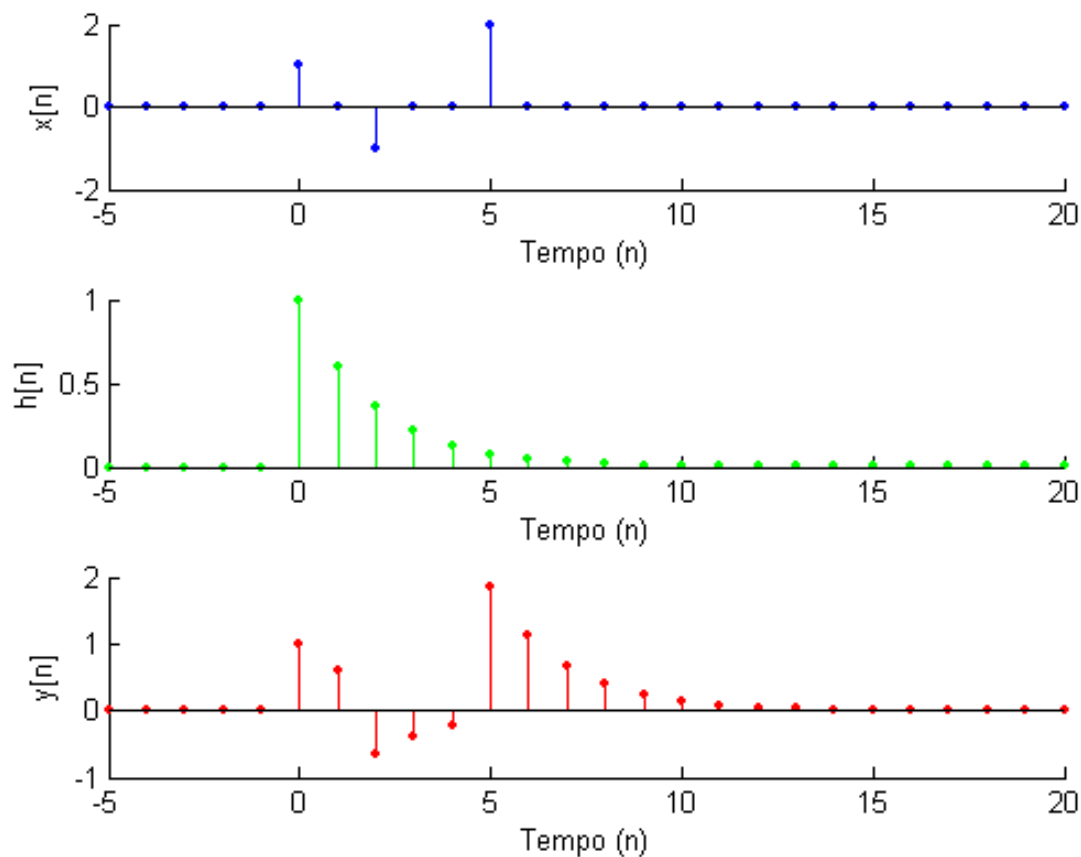
$$n = 19$$



$$n = 20$$



# Resumindo...



# Educational Matlab GUIs

---

- Demos sobre Processamento de Sinais: Convolução, Série de Fourier, Transformadas, etc...

<http://users.ece.gatech.edu/mcclella/matlabGUIs/index.html>

(Acesso em 19/08/2011)

- Ainda há tempo? Vamos brincar um pouco com a *Discrete Convolution Demo!* 😊

# Novidade

---

O ENUNCIADO DO SEGUNDO TRABALHO  
JÁ ESTÁ DISPONÍVEL NA PÁGINA DA  
DISCIPLINA!