Sinais e Sistemas

A Transformada de Fourier de Tempo Contínuo

Renato Dourado Maia

Universidade Estadual de Montes Claros

Engenharia de Sistemas

Introdução

- Nas últimas aulas, desenvolvemos a representação de sinais periódicos como combinação linear de exponenciais complexas harmonicamente relacionadas, e utilizamos essa representação para estudar sistemas LTI.

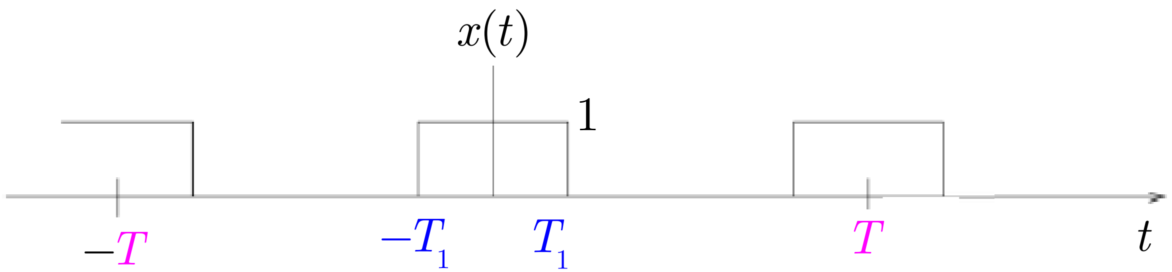
MAS O QUE FAZER PARA SINAIS APERIÓDICOS?

Introdução

- Em seu trabalho, Fourier utilizou o fato de que um sinal aperiódico pode ser interpretado como um sinal periódico de período infinito.

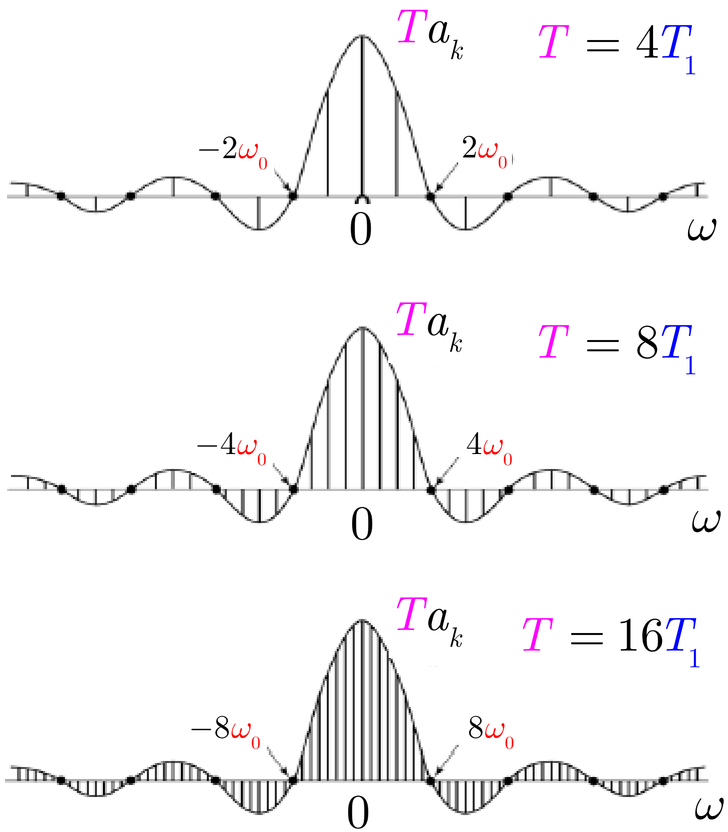
- Se lembrarmos da representação em FS, perceberemos que, conforme o período aumenta, a frequência fundamental diminui, e, na frequência, as componentes harmônicas ficam cada vez mais próximas...

Introdução



$$a_k = \frac{2\,\mathrm{sen}(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T}$$

$$T a_k = \left.\frac{2\,\mathrm{sen}(\omega T_1)}{\omega}\right|_{\omega = k\omega_0}$$



O Par Transformada de Fourier

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \longrightarrow$$ Transformada Inversa de Fourier

Equação de Síntese

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \longrightarrow$$ Transformada (ou Integral) de Fourier

Equação de Análise

CONVERGÊNCIA?

Convergência da FT

- Assim como para sinais periódicos, as condições de Dirichlet garantem que um sinal é igual à sua representação em FT, exceto em valores isolados de tempo para os quais o sinal é descontínuo (Fenômeno Gibbs). As condições são:

1. O sinal deve absolutamente integrável.
2. O sinal deve possuir um número finito de máximos e mínimos num período.
3. O sinal deve possuir um número finito de descontinuidades num período.

Transformada de Fourier (FT)

Exemplo 1

$$x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0$$

$$X(j\omega) = \int_{0}^{+\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \frac{-1}{a + j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{a + j\omega}, \quad a > 0$$

O QUE ACONTECERIA SE $a < 0$?

Transformada de Fourier (FT)

Exemplo 1

$$x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0$$

$$X(j\omega) = \int_{0}^{+\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt = \frac{-1}{a + j\omega} e^{-(a+j\omega)t}\Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{a + j\omega}, \quad a > 0$$

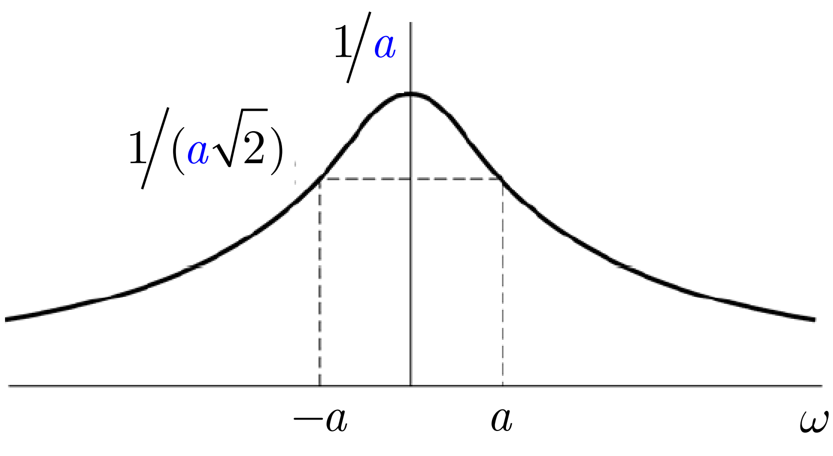
Escrevendo na Forma Módulo/Fase:

$$\left|X(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \qquad \angle X(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

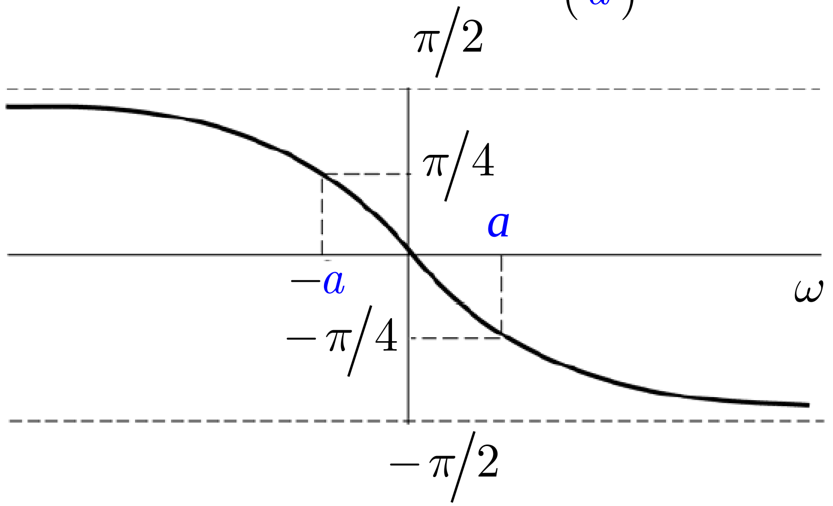
Transformada de Fourier (FT)

Exemplo 1

$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$



$$\angle X(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$



Transformada de Fourier (FT)

Exemplo 2

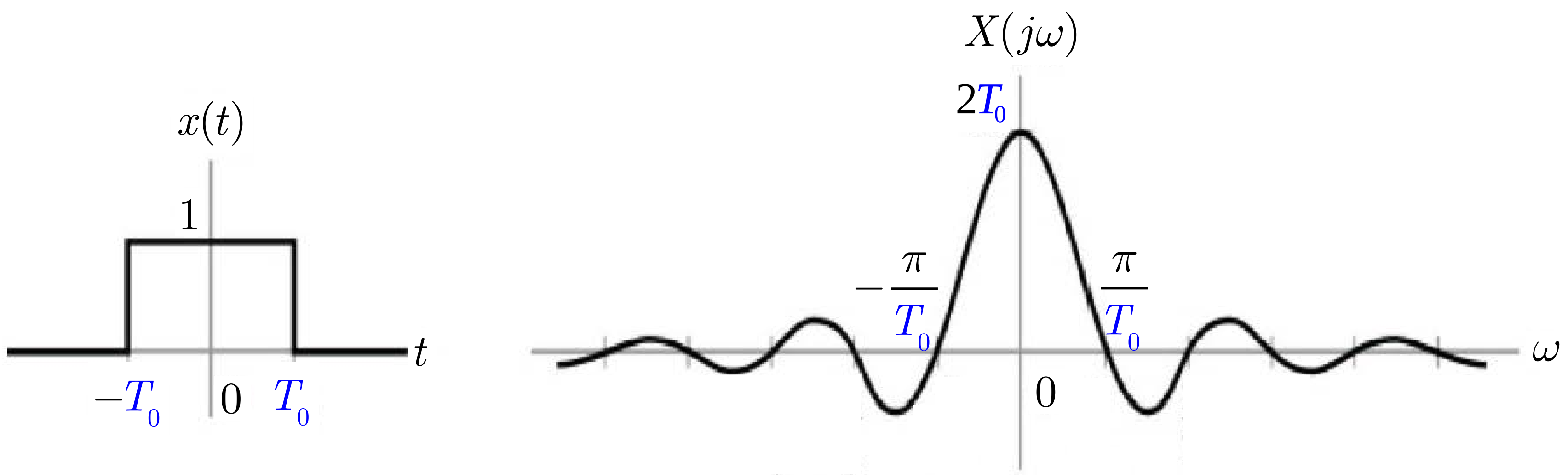
$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T_0 \\ 0, & |t| > T_0 \end{cases}$$

$$X(j\omega) = \int_{-T_0}^{T_0} e^{-j\omega t} dt = \frac{-1}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-T_0}^{T_0} = \frac{-1}{j\omega}\left(e^{-j\omega T_0} - e^{j\omega T_0}\right)$$

$$X(j\omega) = \frac{2j}{j\omega}\left(\frac{e^{-j\omega T_{00}} - e^{j\omega T_0}}{2j}\right) = \frac{2}{\omega}\mathrm{sen}(\omega T_0) = 2T_0 \frac{\mathrm{sen}(\omega T_0)}{\omega T_0}$$

Transformada de Fourier (FT)

Exemplo 2



Transformada de Fourier (FT)

Exemplo 3

$$X(j\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\le W\\ 0, & |\omega|>W\end{cases}$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W}e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi j}e^{j\omega t}\Big|_{-W}^{W}=\frac{1}{\pi t}\mathrm{sen}(Wt)=\frac{W}{\pi}\frac{\mathrm{sen}(Wt)}{Wt}$$

DUALIDADE?

LEIAM NO LIVRO!!!

Transformada de Fourier (FT)

Exemplo 4 – Determinar a FT do impulso

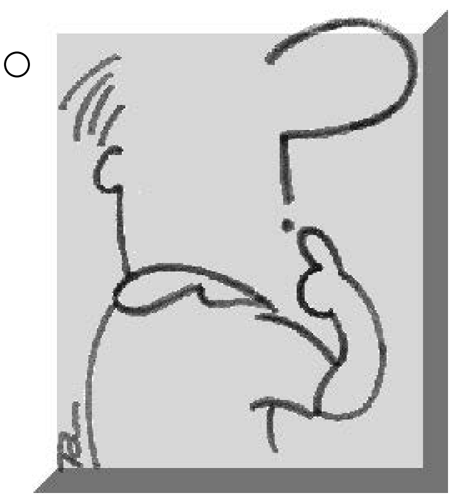
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

Exemplo 5 – Determinar a FT inversa do impulso na Frequência

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}$$

Transformada de Fourier (FT)

Existe FT
para sinais
periódicos?



FT para Sinais Periódicos

Exemplo 6

$$X(j\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t} \longrightarrow$$ PERIÓDICO!!!

Então: $e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \longrightarrow$ ENERGIA CONCENTRADA NUNA ÚNICA FREQUÊNCIA

Generalizando:

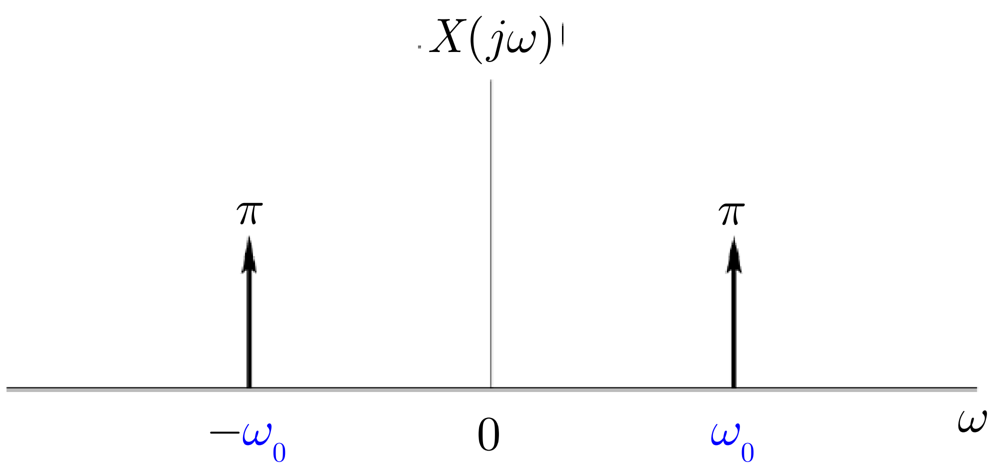
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \leftrightarrow X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

FT para Sinais Periódicos

Exemplo 7

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) \xrightarrow{\text{Euler}} x(t) = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}$$

$$X(j\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$



Algumas Propriedades da FT

Linearidade

$$x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(j\omega)$$

$$y(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} Y(j\omega)$$

$$z(t) = Ax(t) + By(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} Z(j\omega) = AX(j\omega) + BY(j\omega)$$

Deslocamento no Tempo

$$\left.\begin{aligned} x(t) &\overset{FT}{\leftrightarrow} X(j\omega) \\ x(t - t_0) &\overset{FT}{\leftrightarrow} e^{-j\omega t_0} X(j\omega) \end{aligned}\right\}$$

Magnitude se mantém, e há atraso de fase

Algumas Propriedades da FT

Diferenciação no Tempo

$$x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(j\omega)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \overset{FT}{\leftrightarrow} j\omega X(j\omega)$$

Integração no Tempo

$$x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(j\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \overset{FT}{\leftrightarrow} \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

Algumas Propriedades da FT

Diferenciação na Frequência

$$x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(j\omega)$$

$$tx(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} j\frac{d}{d\omega}X(j\omega)$$

Deslocamento na Frequência

$$x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(j\omega)$$

$$e^{j\omega_0 t}x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(j(\omega - \omega_0))$$

Algumas Propriedades da FT

Mudança de Escala no Tempo

$$x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(j\omega)$$

$$x(at) \overset{FT}{\leftrightarrow} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

Relação de Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \overset{FT}{\leftrightarrow} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

Algumas Propriedades da FT

Conjugado

$$x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(j\omega)$$

$$x^*(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X^*\left(-j\omega\right)$$

Se o sinal é real $\begin{cases} X\left(-j\omega\right) = X^*\left(j\omega\right) \\ \mathrm{Re}\left\{X\left(j\omega\right)\right\} = \mathrm{Re}\left\{X\left(-j\omega\right)\right\} & \text{Par} \\ \mathrm{Im}\left\{X\left(j\omega\right)\right\} = -\mathrm{Im}\left\{X\left(-j\omega\right)\right\} & \text{Ímpar} \\ \left|X\left(j\omega\right)\right| = \left|X\left(-j\omega\right)\right| & \text{Par} \\ \angle X\left(j\omega\right) = -\angle X\left(-j\omega\right) & \text{Ímpar} \end{cases}$

Algumas Propriedades da FT

Se o sinal é real e par, a FT será também real e par.

Se o sinal é real e ímpar, a FT será puramente imaginária e ímpar.

Lembrando que um sinal pode ser decomposto em uma soma de partes par e ímpar, pode-se concluir que, para um sinal real:

$$x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(j\omega)$$

$$X(j\omega) = \mathrm{Re}\left\{X(j\omega)\right\} + j\,\mathrm{Im}\left\{X(j\omega)\right\}$$

$$x(t) = Par\left\{x(t)\right\} + \text{Ímpar}\left\{x(t)\right\}$$

$$\mathrm{Par}\left\{x(t)\right\} \overset{FT}{\leftrightarrow} \mathrm{Re}\left\{X(j\omega)\right\}$$

$$\text{Ímpar}\left\{x(t)\right\} \overset{FT}{\leftrightarrow} j\,\mathrm{Im}\left\{X(j\omega)\right\}$$

Exercícios

Exercício 4.1 – *Signals and Systems*

- Determine a FT para cada um dos sinais a seguir, e desenhe os gráficos de magnitude:

a) $x(t) = e^{-2(t-1)}u(t-1)$ b) $x(t) = e^{-2|t-1|}$

Exercício 4.2 – *Signals and Systems*

- Determine a FT para cada um dos sinais a seguir, e desenhe os gráficos de magnitude:

a) $x(t) = \delta(t+1) + \delta(t-1)$ b) $\frac{d}{dt}\{u(-2-t+u(t-2))\}$

Exercícios

Exercício 4.3 – *Signals and Systems*

- Determine a FT para cada um dos sinais periódicos a seguir:

a) $x(t) = \text{sen}(2\pi t + \frac{\pi}{4})$ b) $x(t) = 1 + \cos(6\pi t + \frac{\pi}{8})$

Exercício 4.4 – *Signals and Systems*

- Determine a IFT:

a) $X_1(j\omega) = 2\pi\delta(\omega) + \pi\delta(\omega - 4\pi) + \pi\delta(\omega + 4\pi)$

b) $X_1(j\omega) = \begin{cases} 2 & 0 \leq \omega \leq 2 \\ -2 & -2 \leq \omega < 0 \\ 0 & |\omega| > 2 \end{cases}$