Sinais e Sistemas

Série de Fourier

Renato Dourado Maia

Universidade Estadual de Montes Claros

Engenharia de Sistemas

Unimontes

Introdução

"A Série e a Integral de Fourier englobam um dos desenvolvimentos matemáticos mais produtivos e bonitos, que funciona como instrumento para vários problemas na área da matemática, ciências e engenharia. Maxwell ficou tão admirado com a beleza da Série de Fourier que ele a chamou de um grande poema matemático. Na Engenharia Elétrica, ele é fundamental a áreas de comunicação, processamento de sinais, e diversas outras áreas, incluindo antenas."

LATHI, B. P. *Sinais e Sistemas Lineares*. Porto Alegre. Bookman, 2007. p. 544

Introdução

- A representação e a análise de sistemas LTI utilizando convolução é baseada em expressar sinais como uma combinação linear de impulsos deslocados e ponderados.

- Agora, desenvolveremos a representação e análise de sistemas LTI expressando os sinais como uma combinação linear de exponenciais complexas.

Introdução

- Veremos que se a entrada de um sistema LTI é uma combinação linear de exponenciais complexas, a saída poderá ser expressa nessa mesma forma.

- Veremos primeiro a análise para sinais periódicos, que resulta nas Séries de Fourier: somas ponderadas de exponenciais complexas harmonicamente relacionadas.

Introdução

- Em seguida, veremos a análise para sinais aperiódicos, que resulta nas Transformadas de Fourier: integrais ponderadas de exponenciais complexas não-harmonicamente relacionadas.

A análise não será mais feita no domínio do tempo, mas sim no domínio da frequência!

Representações de Fourier para Sinais

Sinal	Representação
Sinal Contínuo Periódico	Série de Fourier (FS)
Sinal Discreto Periódico	Série de Fourier Discreta (DTFS)
Sinal Contínuo Aperiódico	Transformada de Fourier (FT)
Sinal Discreto Aperiódico	Transformada de Fourier Discreta (DTFT)

Resposta a uma Exponencial Complexa

- Vamos analisar a resposta de um sistema LTI contínuo a uma entrada exponencial complexa:

$$x(t) = e^{st},\ s\ \textit{é um número complexo}$$

Assim:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau = e^{st}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

Tomando $H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$

$$y(t) = H(s)e^{st}$$

Resposta a uma Exponencial Complexa

- Vamos analisar a resposta de um sistema LTI discreto a uma entrada exponencial complexa:

$$x[n] = z^n, \;\; z \;\; \textit{é um número complexo}$$

Assim: $$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{n-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k}$$

Tomando $$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k}$$

$$y[n] = H(z)z^n$$

Resposta a uma Exponencial Complexa

Sintetizando

Contínuo: $x(t) = e^{st},\ s \text{ é um número complexo} \rightarrow y(t) = H(s)e^{st}$

Discreto: $x[n] = z^{n},\ z \text{ é um número complexo} \rightarrow y[n] = H(z)z^{n}$

As exponenciais complexas são autofunções de sistemas LTI discretos e contínuos. $H(z)$ e $H(s)$, para valores específicos de "z" e "s", são os autovalores associados às autofunções: para uma entrada exponencial complexa, a saída é a mesma exponencial complexa, modificada pelo seu respectivo autovalor.

Resposta a uma Exponencial Complexa

Consideremos agora a seguinte entrada, para um sistema LTI:

$$x(t) = a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t} + a_3 e^{s_3 t}$$

O que se pode dizer sobre a saída?

$$a_1 e^{s_1 t} \to a_1 H(s_1) e^{s_1 t}$$

$$a_2 e^{s_2 t} \to a_2 H(s_2) e^{s_2 t}$$

$$a_3 e^{s_3 t} \to a_3 H(s_3) e^{s_3 t}$$

$$y(t) = a_1 H(s_1) e^{s_1 t} + a_2 H(s_2) e^{s_2 t} + a_3 H(s_3) e^{s_3 t}$$

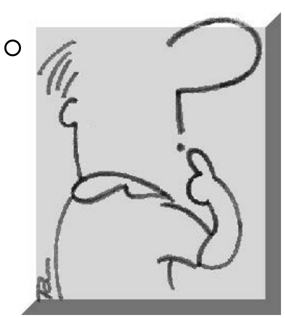
Resposta a uma Exponencial Complexa

Vamos generalizar o raciocínio:

$$x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t} \rightarrow y(t) = \sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t}$$

$$x[n] = \sum_k a_k z_k^n \rightarrow y[n] = \sum_k a_k H(z_k) z_k^n$$

O que há de interessante nisso?



Resposta a uma Exponencial Complexa

- De um modo geral, as variáveis s e z podem ser um número complexo geral. Todavia, a análise de Fourier envolve restrições nessas variáveis:
  - Para o tempo contínuo, o interesse está em valores puramente imaginários:

$$x(t) = e^{st}, \quad s = j\omega, \; x(t) = e^{j\omega t}$$

  - Para o tempo discreto, o interesse está em valores de magnitude unitária:

$$x[n] = z^{n}, \quad z = e^{j\omega}, \; x[n] = e^{j\omega n}$$

Sinais Contínuos Periódicos (FS)

- Quando um sinal contínuo é periódico?
  - Um sinal contínuo é periódico se existe uma constante positiva T, tal que:

$$x(t) = x(t + T), \ \forall t$$

O MENOR VALOR PARA T QUE SATISFAÇA À EQUAÇÃO É CHAMADO DE PERÍODO FUNDAMENTAL – T_0.

$$f_0 = \frac{1}{T_0}: \textit{frequência fundamental de } x(t) \textit{ em hertz}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}: \textit{frequência fundamental de } x(t) \textit{ em radianos por segundo}$$

Sinais Contínuos Periódicos (FS)

- O sinal $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ é periódico, com frequência fundamental ω_0 e período fundamental $T_0 = 2\pi / \omega_0$. Tal como já vimos, o conjunto de harmônicas é:

$$\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t},\ \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Como as harmônicas possuem frequências que são múltiplas da frequência fundamental, elas também são periódicas com período T_0. Então, uma combinação linear de exponenciais complexas harmonicamente relacionadas também resultará num sinal periódico com período T_0.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}\ \ \textit{é um sinal periódico, com período}\ T_0$$

Vejamos uma animação em Java...

Sinais Contínuos Periódicos (FS)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \ \ \textit{é um sinal periódico, com período } T_0$$

Representação em Série de Fourier para um sinal contínuo periódico: Forma Exponencial

$$\therefore \ k = \pm 1 \rightarrow \textit{componentes fundamentais (primeira harmônica)}$$

$$\therefore \ k = \pm 2 \rightarrow \textit{componentes da segunda harmônica}$$

$$\therefore \ k = \pm N \rightarrow \textit{componentes da enésima harmônica}$$

Sinais Contínuos Periódicos (FS)

Exemplo: Script em Matlab – M_10_SerieFourierProg1.m

$$x(t) = \sum_{k=-3}^{+3} a_k e^{jk2\pi t} \qquad \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = a_{-1} = 1/4 \\ a_2 = a_{-2} = 1/2 \\ a_3 = a_{-3} = 1/3 \end{cases}$$

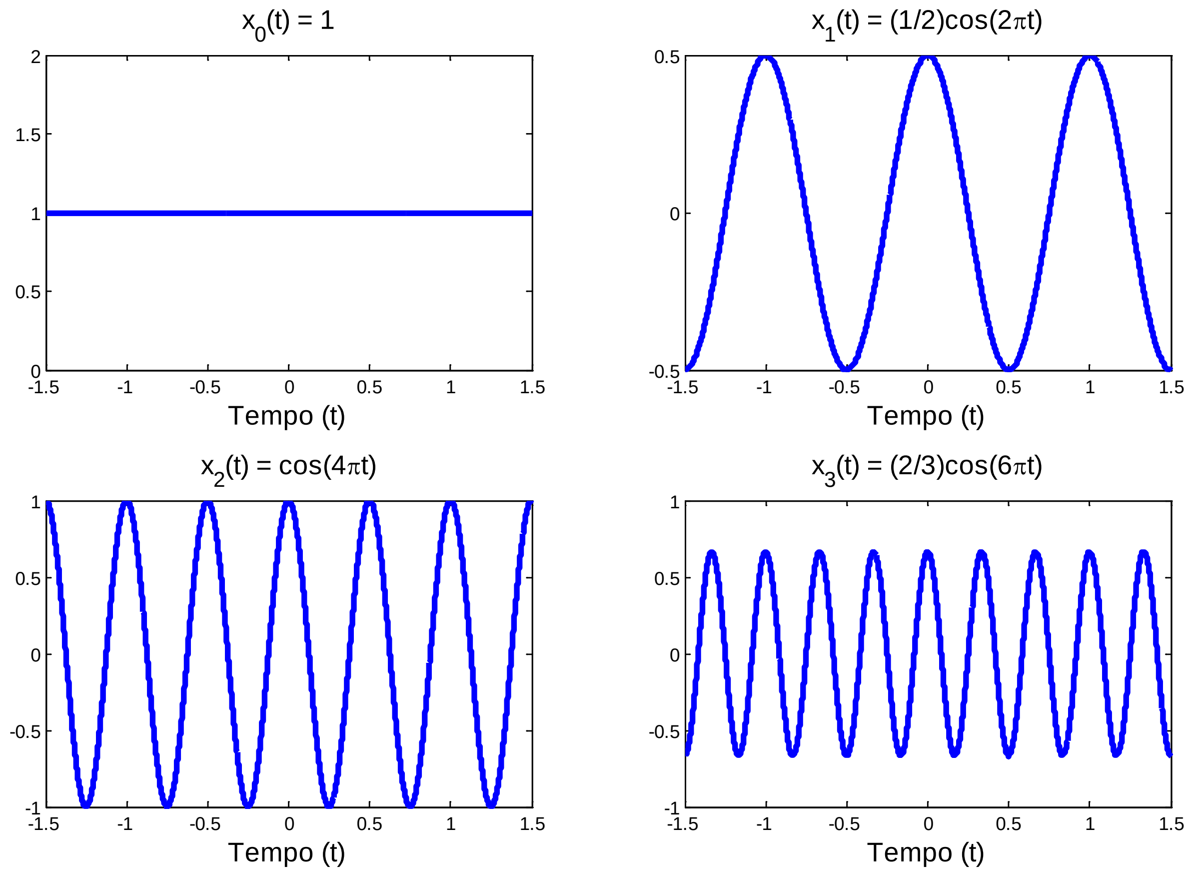
Desenvolvendo o somatório, reorganizando os termos, e utilizando a relação de Euler:

$$x(t) = 1 + \frac{1}{4}\left(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}\right) + \frac{1}{3}\left(e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t}\right)$$

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos 2\pi t + \cos 4\pi t + \frac{2}{3}\cos 6\pi t$$

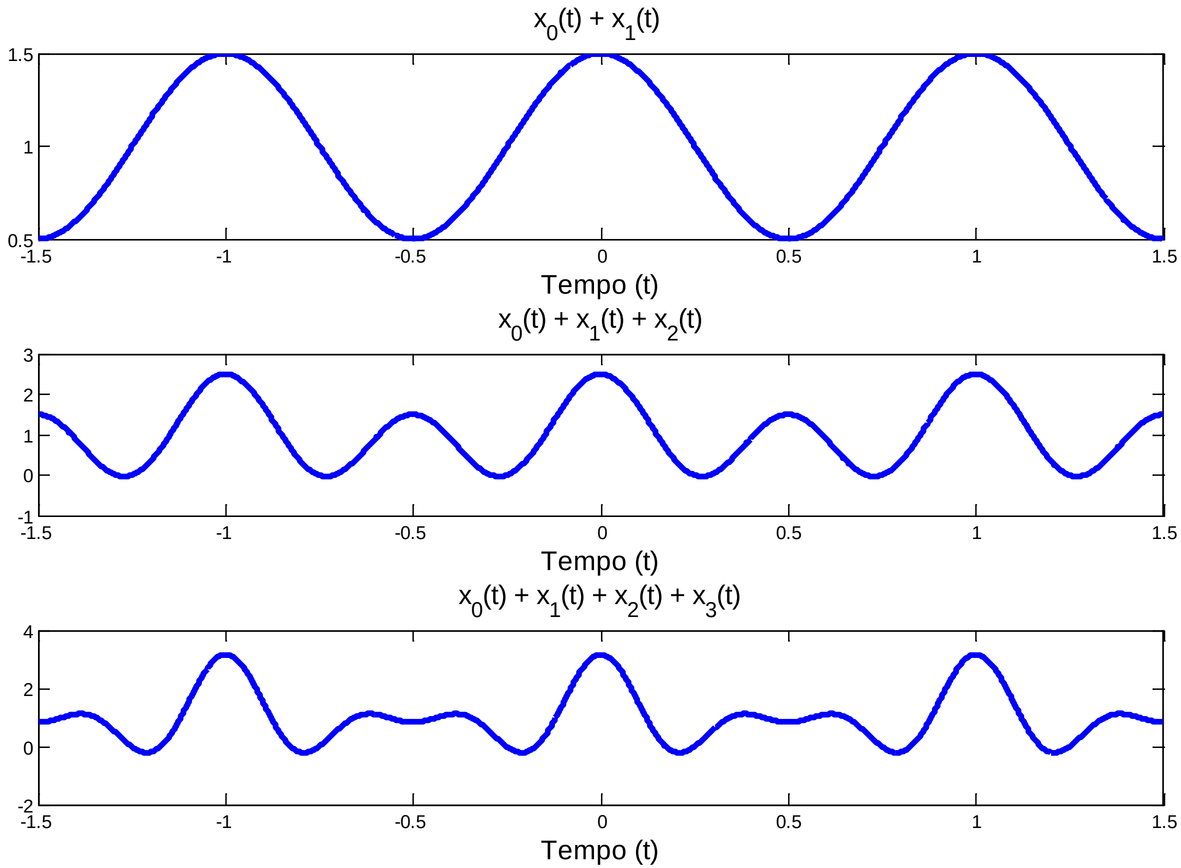
Sinais Contínuos Periódicos (FS)

Exemplo



Sinais Contínuos Periódicos (FS)

Exemplo



Sinais Contínuos Periódicos (FS)

Exemplo

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos 2\pi t + \cos 4\pi t + \frac{2}{3}\cos 6\pi t$$

Esse resultado é um exemplo de uma forma alternativa da Série de Fourier, aplicável para sinais contínuos periódicos reais.

Vamos considerar um sinal periódico contínuo real:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t}$$

Assim: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t}$

Sinais Contínuos Periódicos (FS)

Exemplo

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t} \xrightarrow[\text{Trocando } k \text{ por } -k]{} x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{-k}^* e^{jk\omega_0 t}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{-k}^* e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\Downarrow$$

Para sinais contínuos periódicos reais: $a_k^* = a_{-k}$

Sinais Contínuos Periódicos (FS)

Vamos derivar as formas alternativas da Série de Fourier para sinais contínuos periódicos reais:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_k e^{jk\omega_0 t} + a_{-k} e^{-jk\omega_0 t} \right]$$

$$\Big\downarrow \; a_k^* = a_{-k}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\boxed{a_k e^{jk\omega_0 t} + a_k^* e^{-jk\omega_0 t}} \right]$$

SOMA DE COMPLEXOS CONJUGADOS

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2Real\{a_k e^{jk\omega_0 t}\}$$

Sinais Contínuos Periódicos (FS)

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2Real\{a_k e^{jk\omega_0 t}\}$$

$$a_k = A_k e^{j\theta_k}$$

(Forma Polar)

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2Real\{A_k e^{j(k\omega_0 t + \theta_k)}\}$$

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$$

Representação em Série de Fourier para um sinal contínuo periódico real: Forma Trigonométrica Compacta.

Sinais Contínuos Periódicos (FS)

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2Real\{a_k e^{jk\omega_0 t}\}$$

$$a_k = B_k + jC_k$$

(Forma Retangular)

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty}[B_k \cos(k\omega_0 t) - C_k \operatorname{sen}(k\omega_0 t)]$$

Representação em Série de Fourier para um sinal contínuo periódico real: Forma Trigonométrica.

Sinais Contínuos Periódicos (FS)

Formas da FS para Sinais Contínuos Periódicos Reais:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \longrightarrow \text{Forma Exponencial}$$

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k) \longrightarrow \text{Forma Trigonométrica Compacta}$$

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \left[B_k \cos(k\omega_0 t) - C_k \operatorname{sen}(k\omega_0 t)\right] \longrightarrow \text{Forma Trigonométrica}$$

Sinais Contínuos Periódicos (FS)

MAS COMO CALCULAR OS COEFICIENTES DA FS?

... contas, contas, contas ... (faremos depois!)

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

Sinais Contínuos Periódicos (FS)

FS de um Sinal Periódico Contínuo

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \longrightarrow$$ Equação de Síntese

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \longrightarrow$$ Equação de Análise

$$\{a_k\} \rightarrow \textit{coeficientes da Série de Fourier ou coeficientes espectrais}$$

Quantificam a contribuição de cada harmônica.

$$a_0 \longrightarrow$$ Corresponde ao valor médio sobre um período e é chamado de componente DC.

Sinais Contínuos Periódicos (FS)

Exemplo

$$x(t) = \mathrm{sen}(\omega_0 t)$$

Relação de Euler: $x(t) = \mathrm{sen}(\omega_0 t) = \frac{1}{2j} e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j} e^{-j\omega_0 t}$

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{2j} \\ a_{-1} = -\dfrac{1}{2j} \\ a_k = 0, \;\; k \neq 1 \;\; e \;\; k \neq -1 \end{cases}$$

Sinais Contínuos Periódicos (FS)

Exemplo: Script em Matlab – M_10_SerieFourierProg2.m

$$x(t) = 1 + \mathrm{sen}(\omega_0 t) + 2\cos(\omega_0 t) + \cos(2\omega_0 t + \pi/4)$$

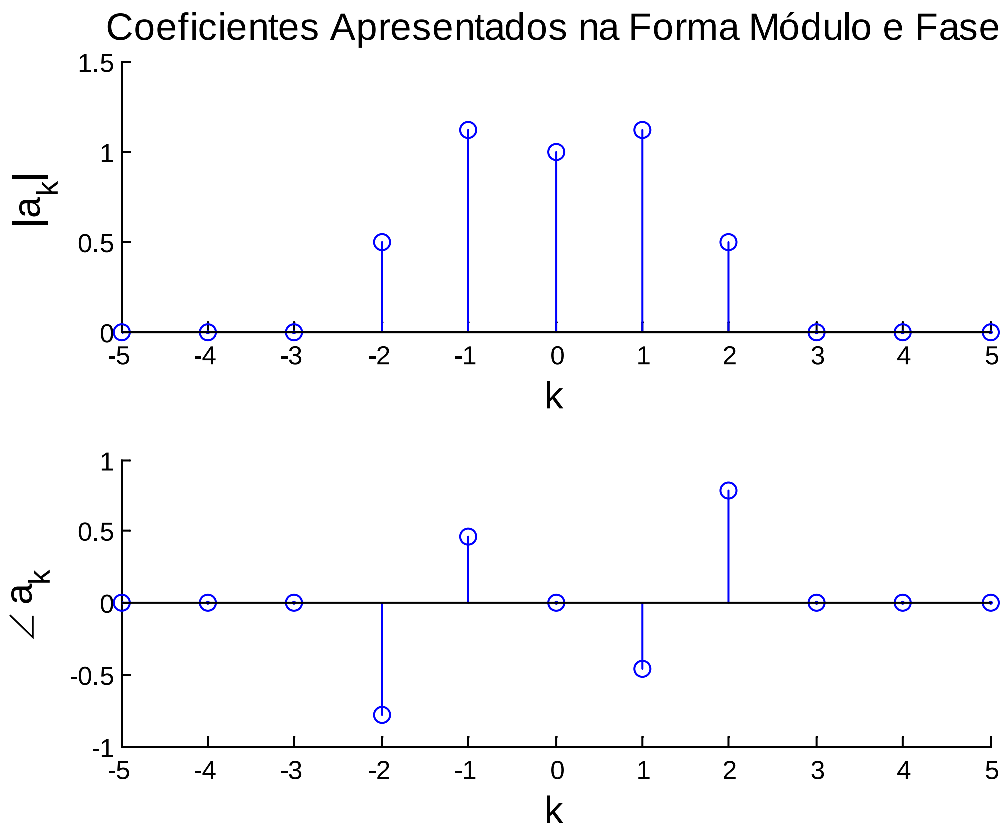
Aplicando-se a Relação de Euler:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 1 - \dfrac{1}{2}j \\ a_{-1} = 1 + \dfrac{1}{2}j \end{cases} \qquad \begin{cases} a_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(1 + j) \\ a_{-2} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(1 - j) \\ a_k = 0, \quad |k| > 2 \end{cases}$$

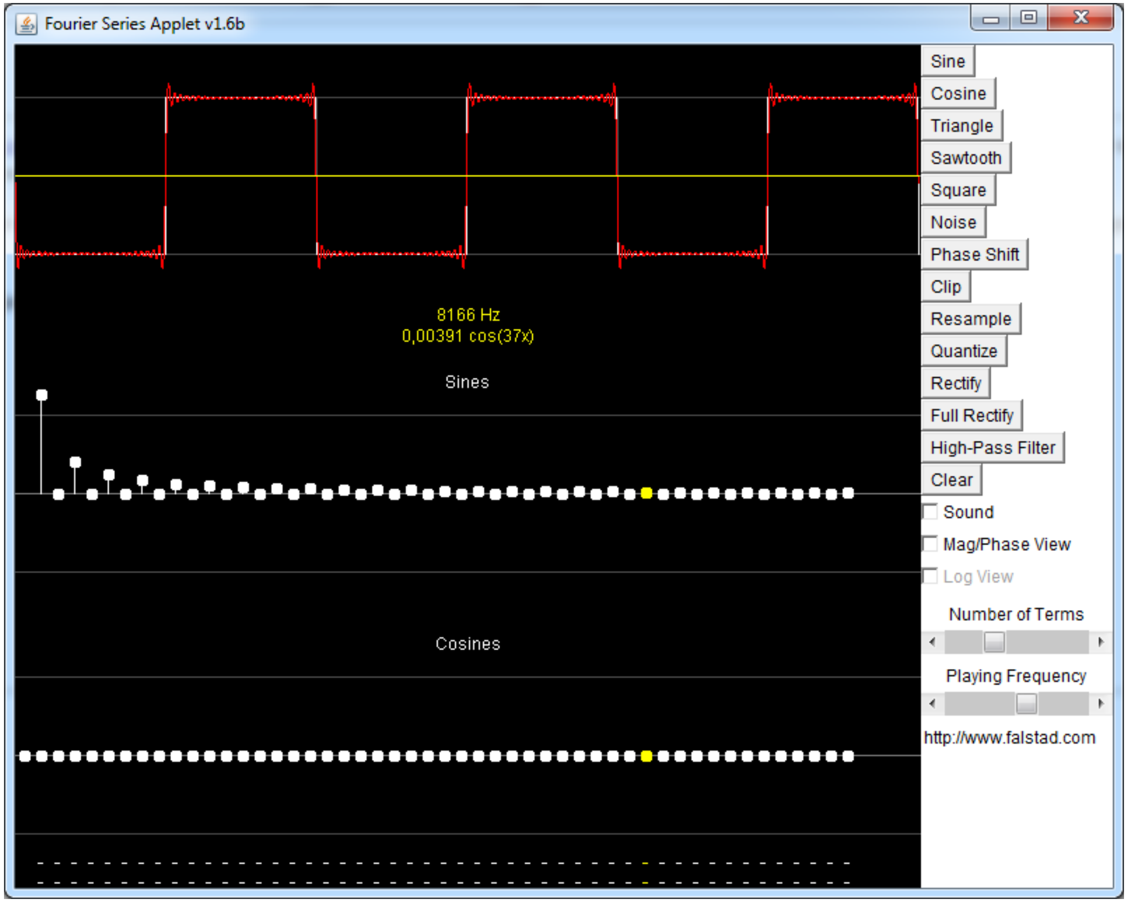
Como os coeficientes da FS são números complexos, eles podem também ser expressos na forma polar – módulo e fase.

Sinais Contínuos Periódicos (FS)

Exemplo



Sinais Contínuos Periódicos (FS)



http://www.falstad.com/fourier/