Controle de Sistemas

Estabilidade

Renato Dourado Maia

Universidade Estadual de Montes Claros

Engenharia de Sistemas

Estabilidade Relativa

- A estabilidade relativa de um sistema pode ser definida como a propriedade que é medida pelo valor da parte real de cada raiz ou par de raízes.

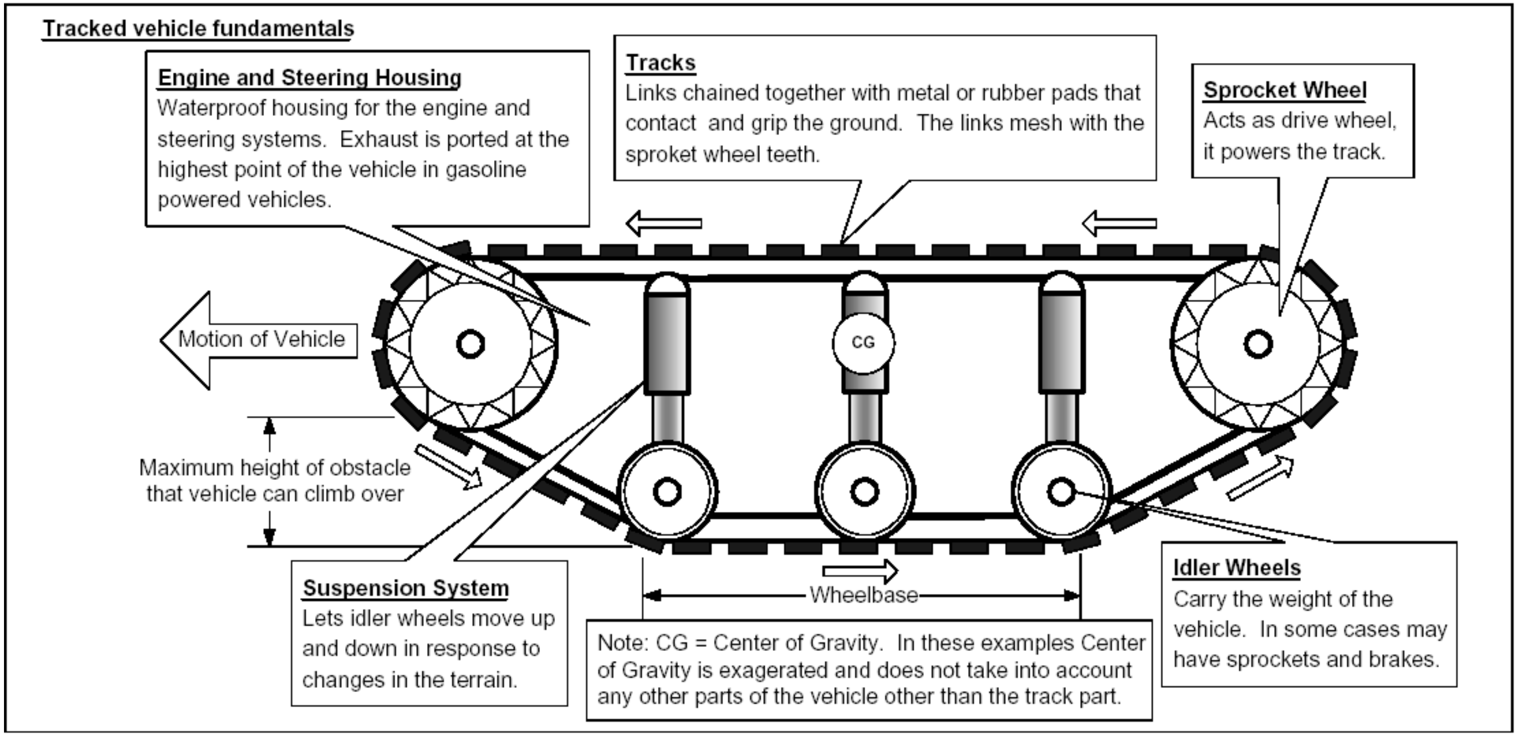
- Para duas raízes, r_1 e r_2, se $|R\{r_1\}| < |R\{r_2\}|$, diz-se que r_2 é relativamente mais estável.

- A estabilidade relativa de um sistema pode também ser definida em termos do coeficiente de amortecimento, ζ, de cada par de raízes complexas. Como?

Exemplo: Controle de Manobra de um Veículo sobre Lagartas

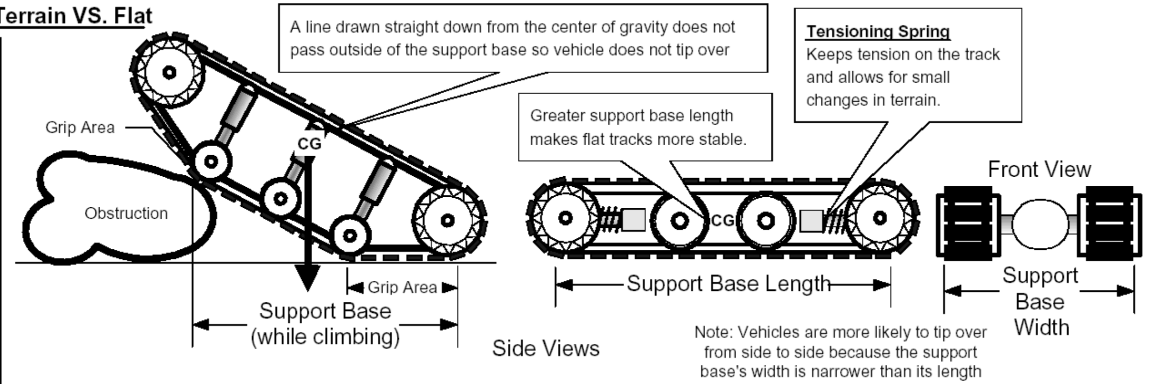
- Objetivo: controle de direção de um veículo que possui ação independente nas duas rodas.
- O que se pretende? Para uma entrada em rampa, manter o erro em estado estacionário dentro de uma faixa.

Por que projetar pensando em entrada em rampa?



Different Kinds of Tracks: All Terrain VS. Flat

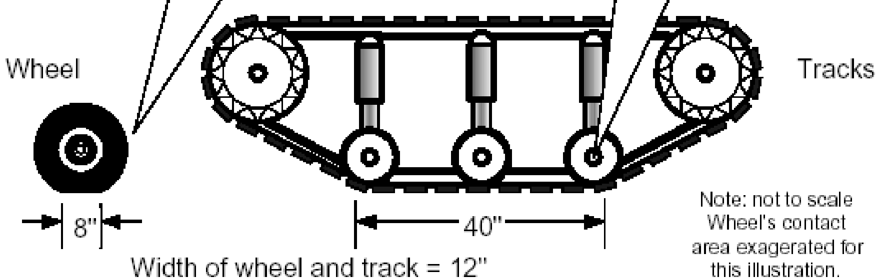
Tank-style tracks are used for very rough terrain or higher speeds. Flatter tracks are used on earth-moving equipment because more track can contact the ground and climbing over obsticals is less important. By having a larger wheelbase the flat track is more stable. An object is stable as long as a line pointing straight down from its center of gravity does not go outside of its support base.



Wheel's and Tires Vs. Tracks

The weight of the vehicle makes the tire flatten where it contacts the ground. This gives a contact area of 8" x 12" (the width of the tire) for a total area of 96 square inches. (Depends on air pressure in the tire)

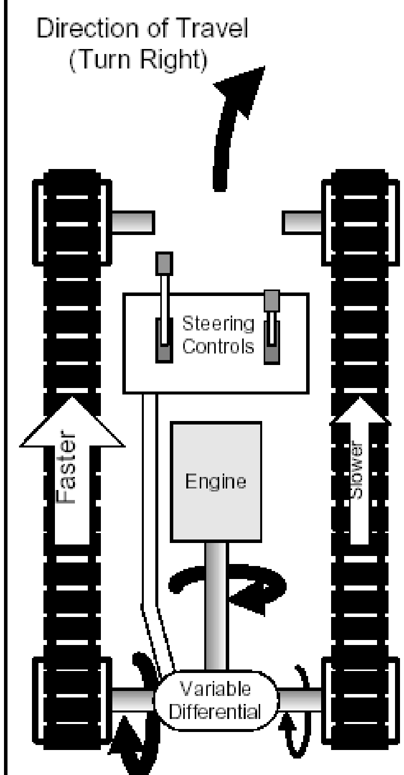
The weight of the vehicle is dispersed over the entire length of track that contacts the ground. This gives a contact area of 40" x 12" (the width of the track) for a total of 480 square inches.



This 4-wheeled vehicle has a maximum of 384 square inches of contact with the ground. A forth of the total weight of the vehicle would be carried by each wheel.

This 2-tracked vehicle has a maximum of 960 square inches of contact with the ground. A sixth of the total weight of the vehicle is carried by each idler wheel.

Steering a Tracked Vehicle



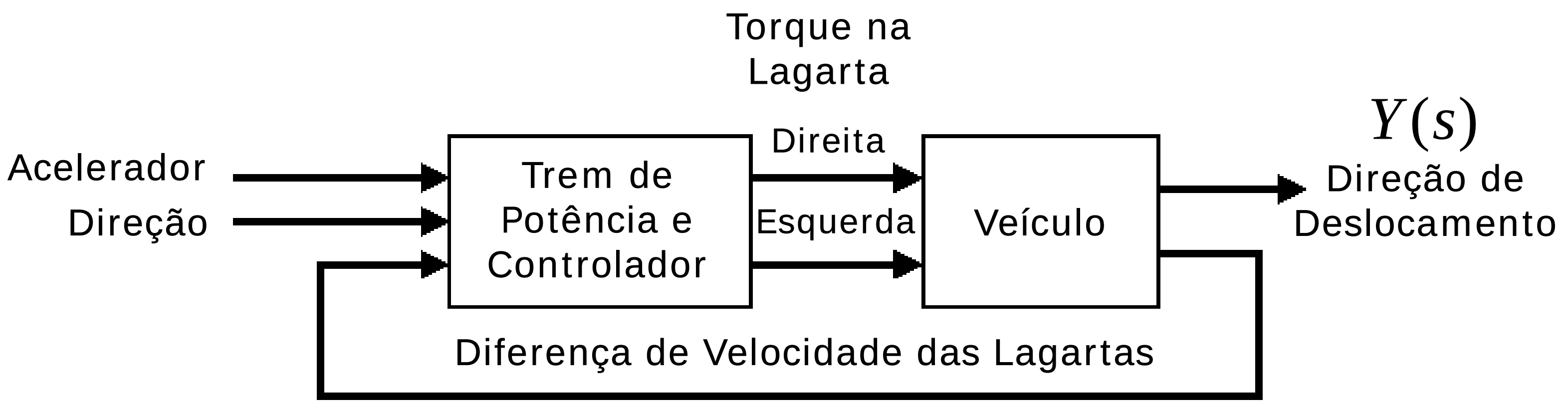
Tracked vehicles are steered by adjusting the speed of the track on one side of the vehicle in relation to the speed of the track on the other side. This creates a torque on the vehicle and causes it to pivot around the slower track. The steering controls change individual track speeds through a variable speed differential. The differential is usually controlled by levers.

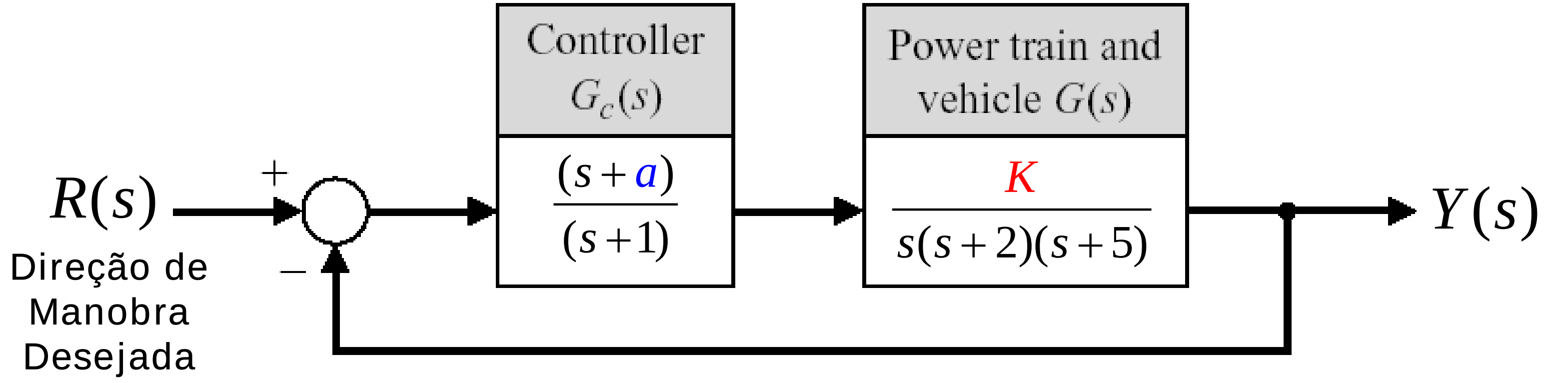
By reversing one track entirely the vehicle can pivot and spin in place.

Most of the track is sliding sideways compared to the forward motion of the vehicle when turning. This can cause damage to the ground or to rodadways.

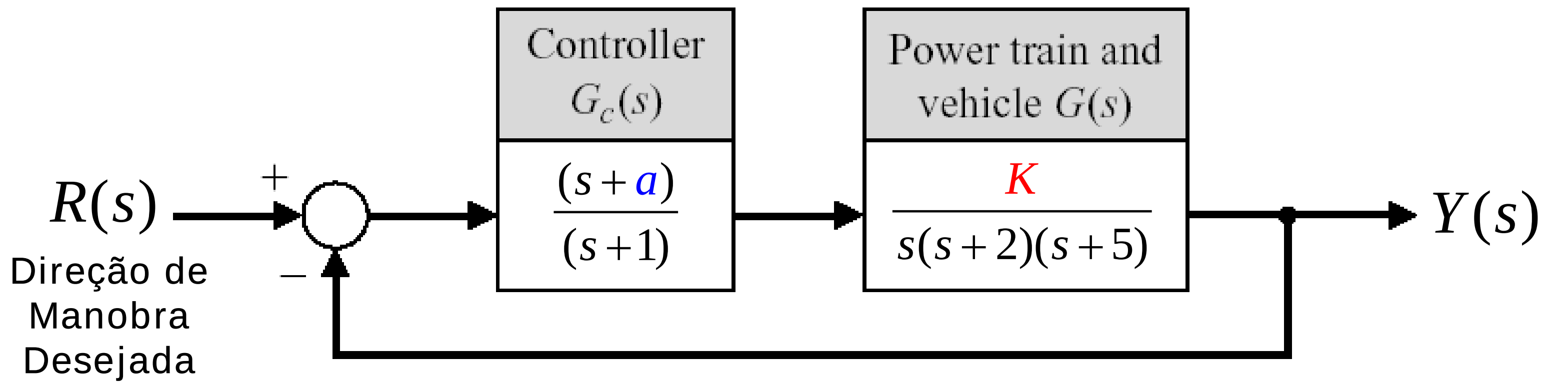
Exemplo: Controle de Manobra de um Veículo sobre Lagartas

Diagramas do Sistema





Exemplo: Controle de Manobra de um Veículo sobre Lagartas



Equação Característica da Malha Fechada:

$$1+G_c(s)G(s)=1+\frac{K(s+a)}{s(s+1)(s+2)(s+5)}=0$$

$$s(s+1)(s+2)(s+5)+K(s+a)=s^4+8s^3+17s^2+(K+10)s+Ka=0$$

Como determinar a região de estabilidade para valores de K e a?

Exemplo: Controle de Manobra de um Veículo sobre Lagartas

Arranjo de Routh

$$s(s+1)(s+2)(s+5)+K(s+a)=s^4+8s^3+17s^2+(K+10)s+Ka=0$$

$$\left.\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 17 & Ka \\ s^3 & 8 & (K+10) & 0 \\ s^2 & b_3 & Ka & \\ s^1 & c_3 & & \\ s^0 & Ka & & \end{array}\right\}$$

$$b_3=\frac{126-K}{8}>0$$

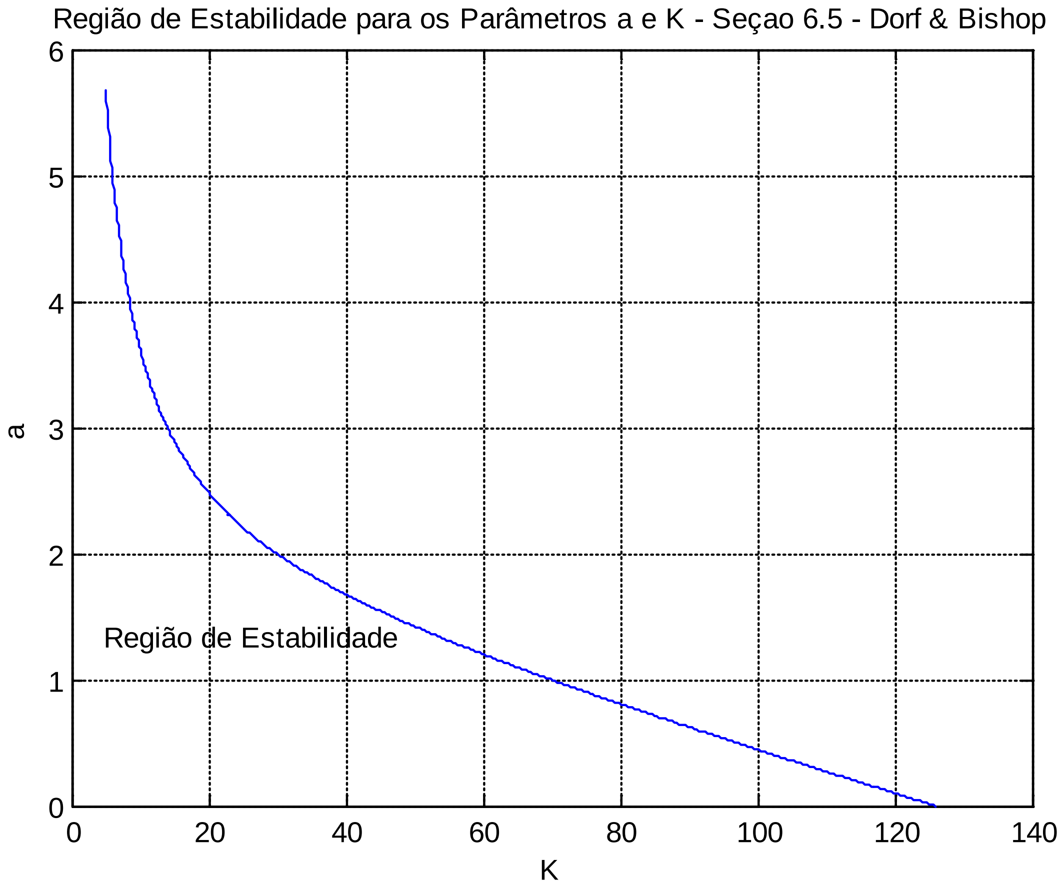
$$c_3=\frac{b_3(K+10)-8Ka}{b_3}>0$$

$$K<126$$

$$Ka>0$$

$$(K+10)(126-K)-64Ka>0 \rightarrow a<-K/64+116/64+1260/64K$$

Exemplo: Controle de Manobra de um Veículo sobre Lagartas



Script em Matlab: M_9_EstabilidadeProg1.m

Exemplo: Controle de Manobra de um Veículo sobre Lagartas

- Agora deve ser analisado o erro em estado estacionário para uma rampa de inclinação *A*. Como o sistema possui realimentação unitária negativa:

$$e_{ss} = \frac{A}{K_v} = \frac{A}{\lim_{s \to 0} sG_c(s)G(s)} = \frac{10A}{Ka}$$

- Infinitos pares de K e a podem ser escolhidos para que um determinado requisito de erro em estado estacionário seja atendido...

Exemplo: Controle de Manobra de um Veículo sobre Lagartas

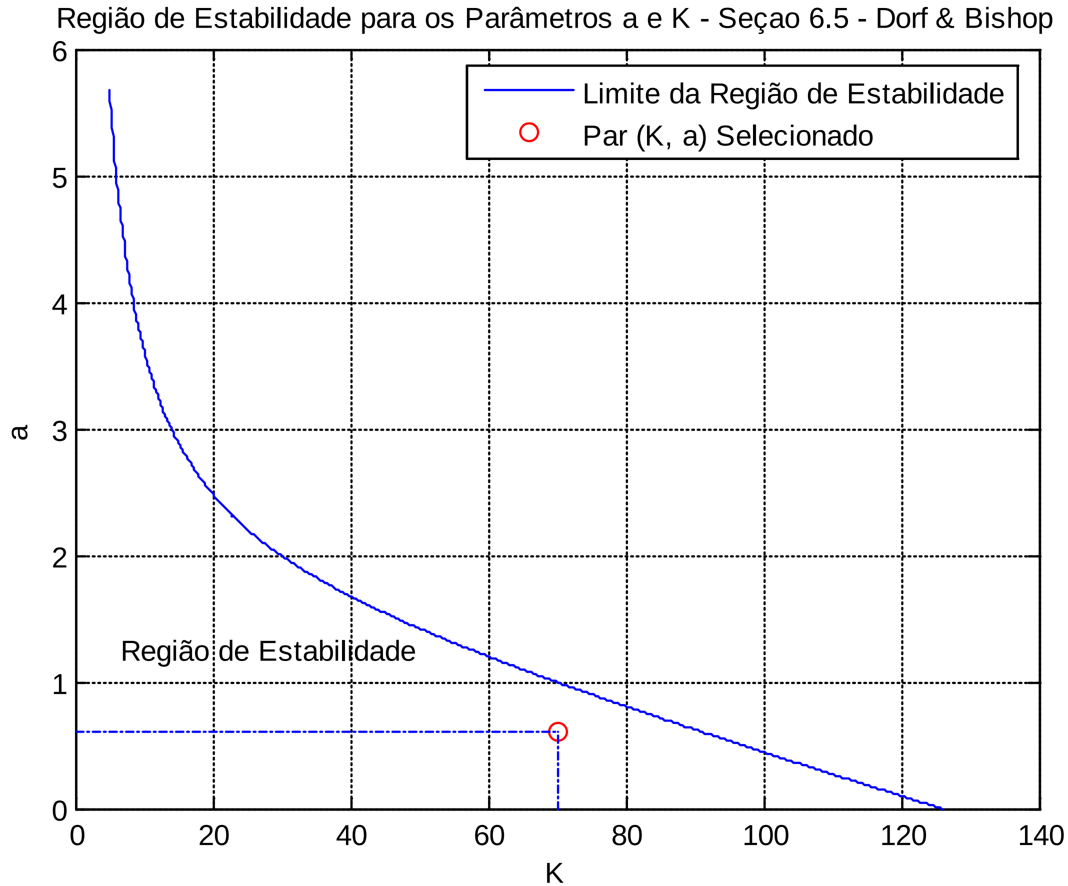
- Para um erro em estado estacionário igual a 23,8% do valor de *A*:

$$\left.\begin{aligned} e_{ss} &= \frac{10A}{Ka} = 0.238A \\ Ka &= \frac{10}{0.238} = 42 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &K = 70 \text{ e } a = 0,6 \leftarrow \\ &K = 50 \text{ e } a = 0,84 \\ &etc\ldots\ \ etc\ldots\ \ etc\ldots \end{aligned}$$

Exemplo: Controle de Manobra de um Veículo sobre Lagartas

$$K = 70$$

$$a = 0,6$$



Script em Matlab: M_9_EstabilidadeProg1.m

Exemplo: Controle de Manobra de um Veículo sobre Lagartas

twotrackstable.m

```
% the stability region for the two track vehicle
% control problem
%
a=[0.1:0.01:3.0]; K=[20:1:120];
x=0*K; y=0*K;
n=length(K); m=length(a);
for i=1:n
 for j=1:m
  q=[1, 8, 17, K(i)+10, K(i)*a(j)];
  p=roots(q);
  if max(real(p)) > 0, x(i)=K(i); y(i)=a(j-1); break; end
 end
end
plot(x,y), grid, xlabel('K'), ylabel('a')
```

Range of a and K

Initialize plot vectors as zero vectors of appropriate lengths.

Characteristic polynomial

For a given value of K: determine first value of a for instability.

Versão do livro para geração da região de estabilidade...

Exemplo: Controle de Manobra de um Veículo sobre Lagartas

aKramp.m

```
% This script computes the ramp response
% for the two-track vehicle turning control
% problem with a=0.6 and K=70
%
t=[0:0.01:10]; u=t;
numgc=[1 0.6]; dengc=[1 1];
numg=[70]; deng=[1 7 10 0];
[numa,dena]=series(numgc,dengc,numg,deng);
[num,den]=cloop(numa,dena);
[y,x]=lsim(num,den,u,t);
plot(t,y,t,u), grid
xlabel('Time (sec)'), ylabel('y(t)')
```

u = unit ramp input

$a = 0.6$ and $K = 70$

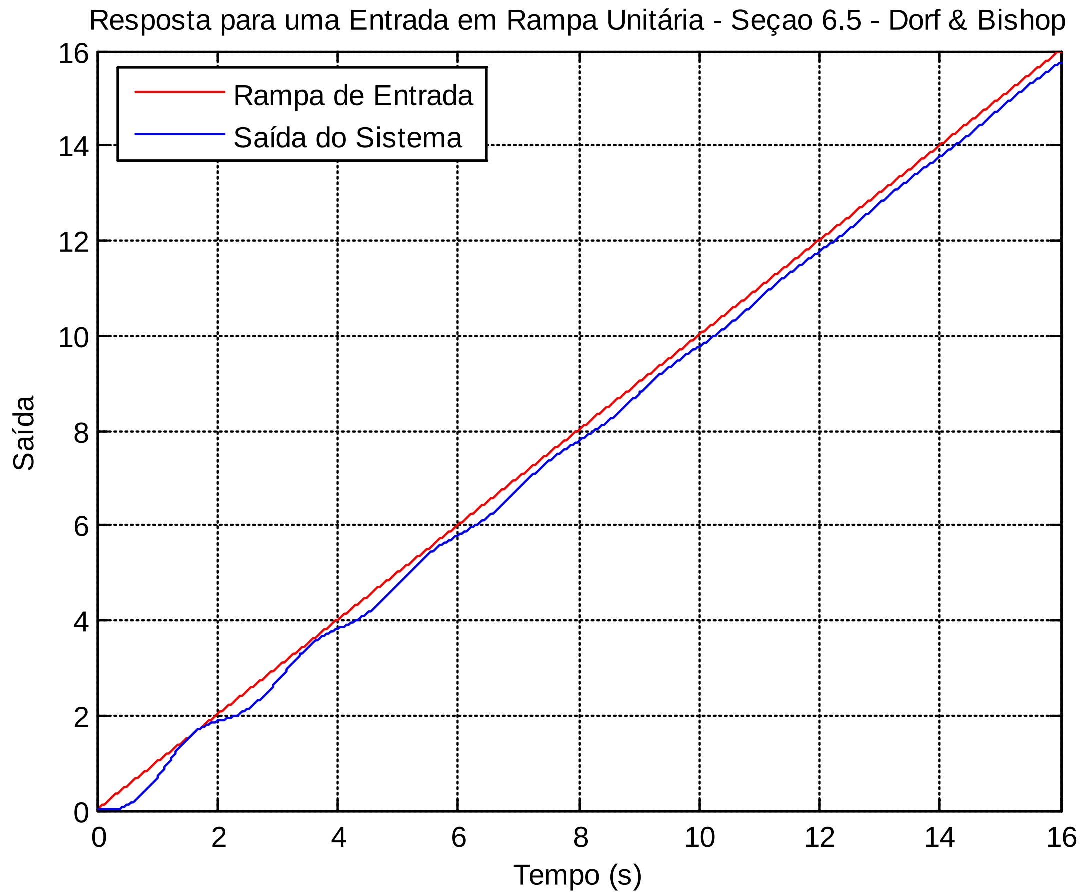
Linear simulation

Versão do livro para geração da resposta à rampa... A função cloop é obsoleta, e deve ser substituída pela função feedback...

Exemplo: Controle de Manobra de um Veículo sobre Lagartas

$$K = 70$$

$$a = 0,6$$



Script em Matlab: M_9_EstabilidadeProg1.m

Exemplo: Controle de Manobra de um Veículo sobre Lagartas

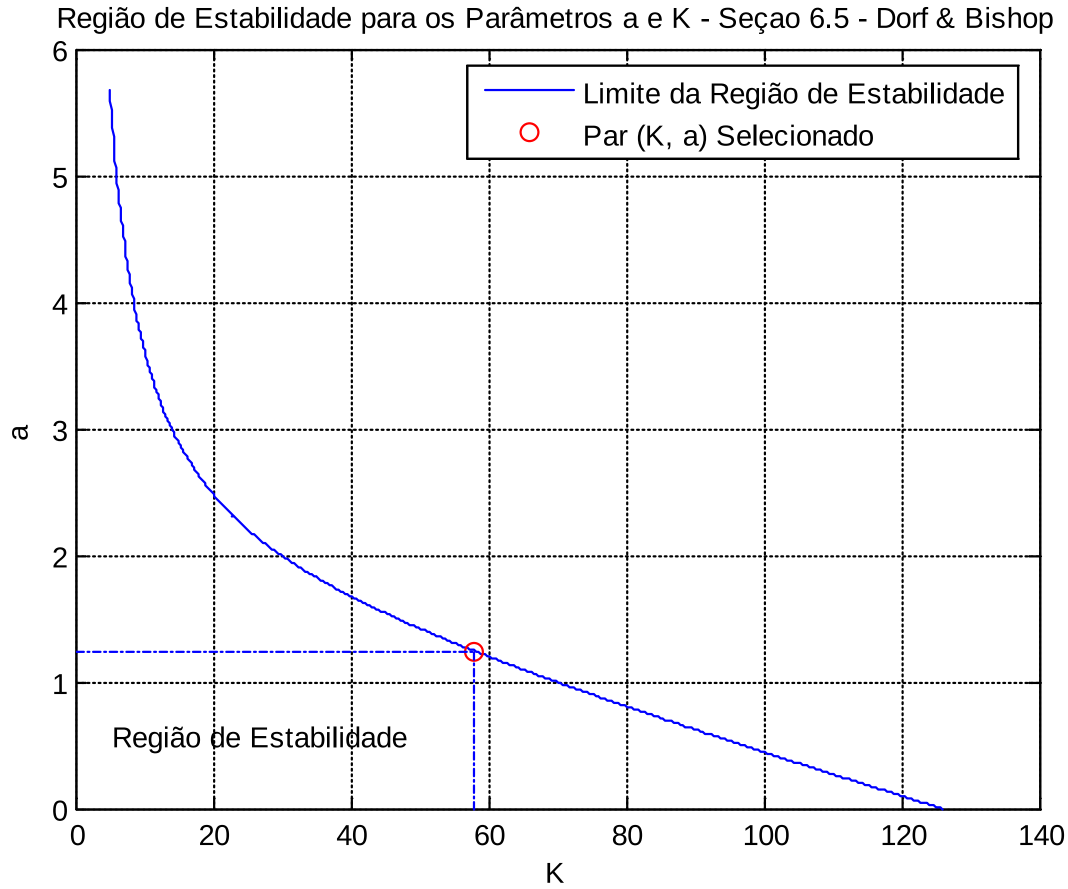
- Observação interessante: o valor mínimo do erro em estado estacionário ocorre para os valores $a = 1,2456$ e $K = 58$, levando ao produto máximo $Ka = 72,25$ (valores aproximados).

Por que não se deve escolher esse par de valores?

Exemplo: Controle de Manobra de um Veículo sobre Lagartas

$$K = 57$$

$$a = 1,2$$

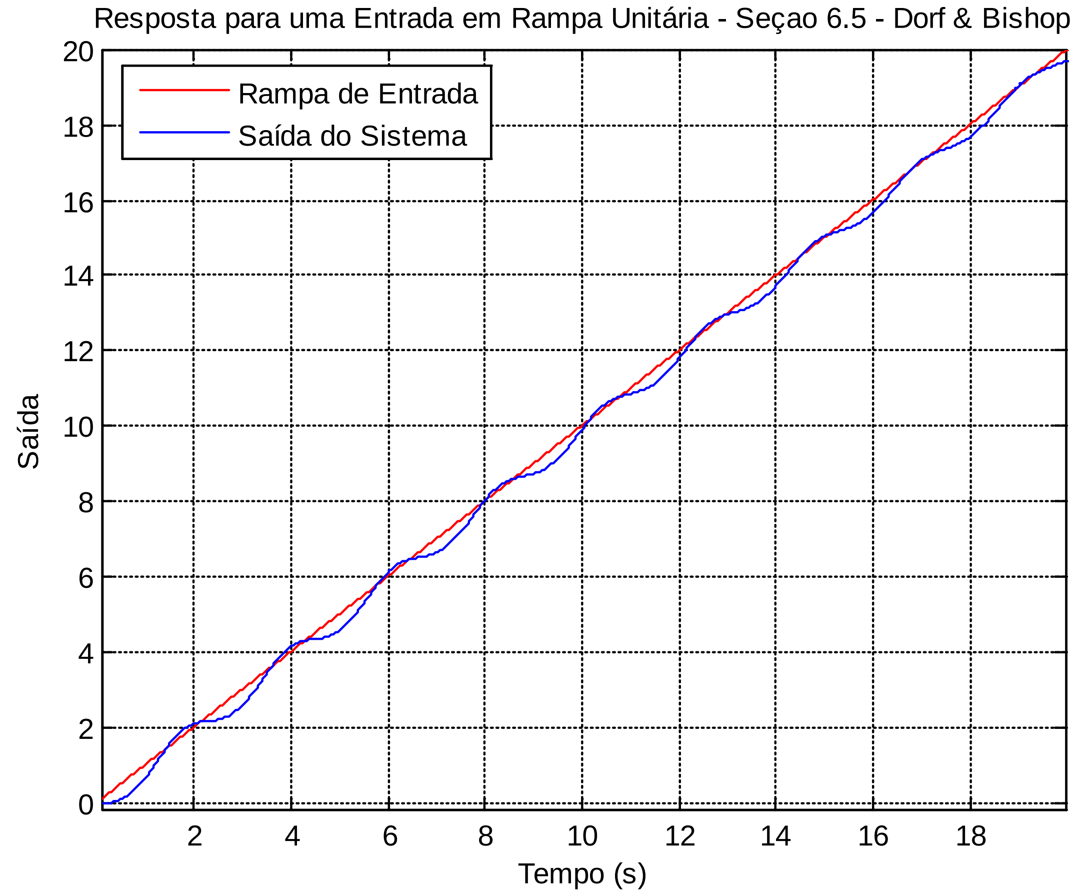


Porque é importante pensar na estabilidade relativa! Algo mais?

Exemplo: Controle de Manobra de um Veículo sobre Lagartas

$$K = 57$$

$$a = 1,2$$

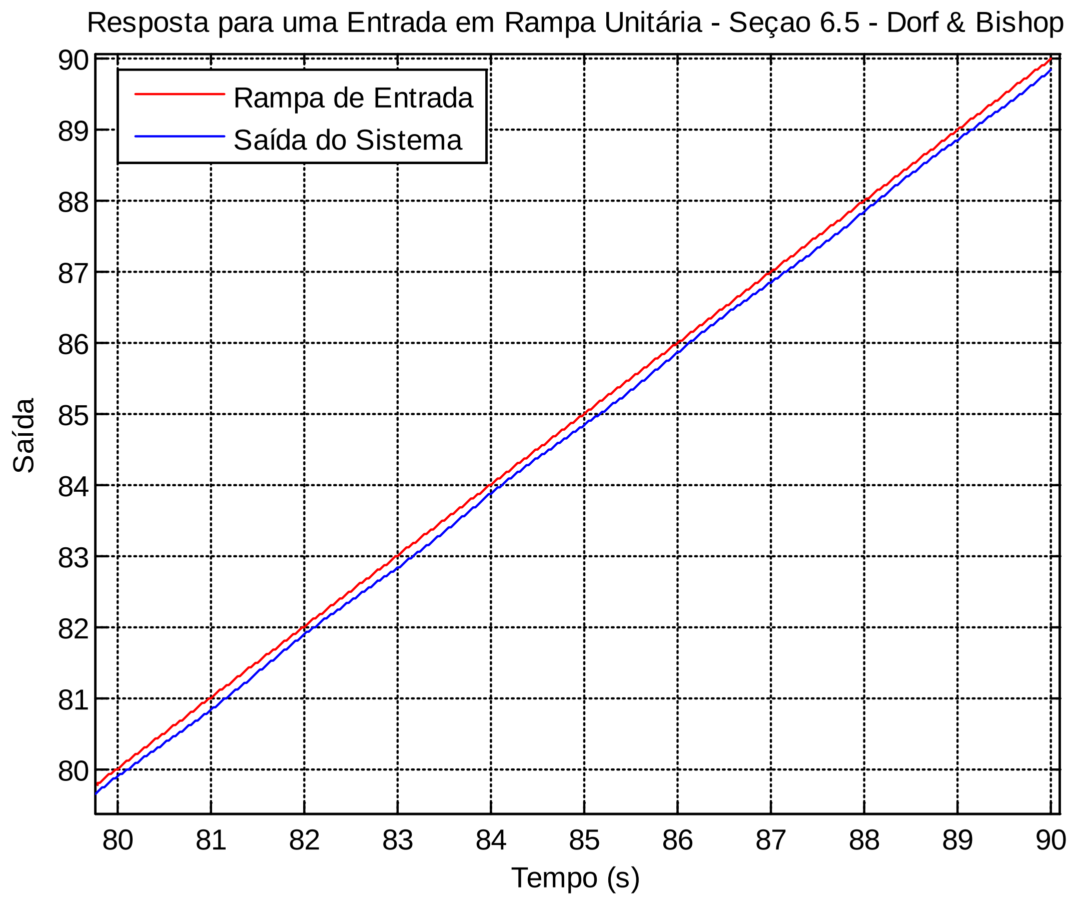


O que aconteceu com o tempo de assentamento?

Exemplo: Controle de Manobra de um Veículo sobre Lagartas

$$K = 57$$

$$a = 1.2$$

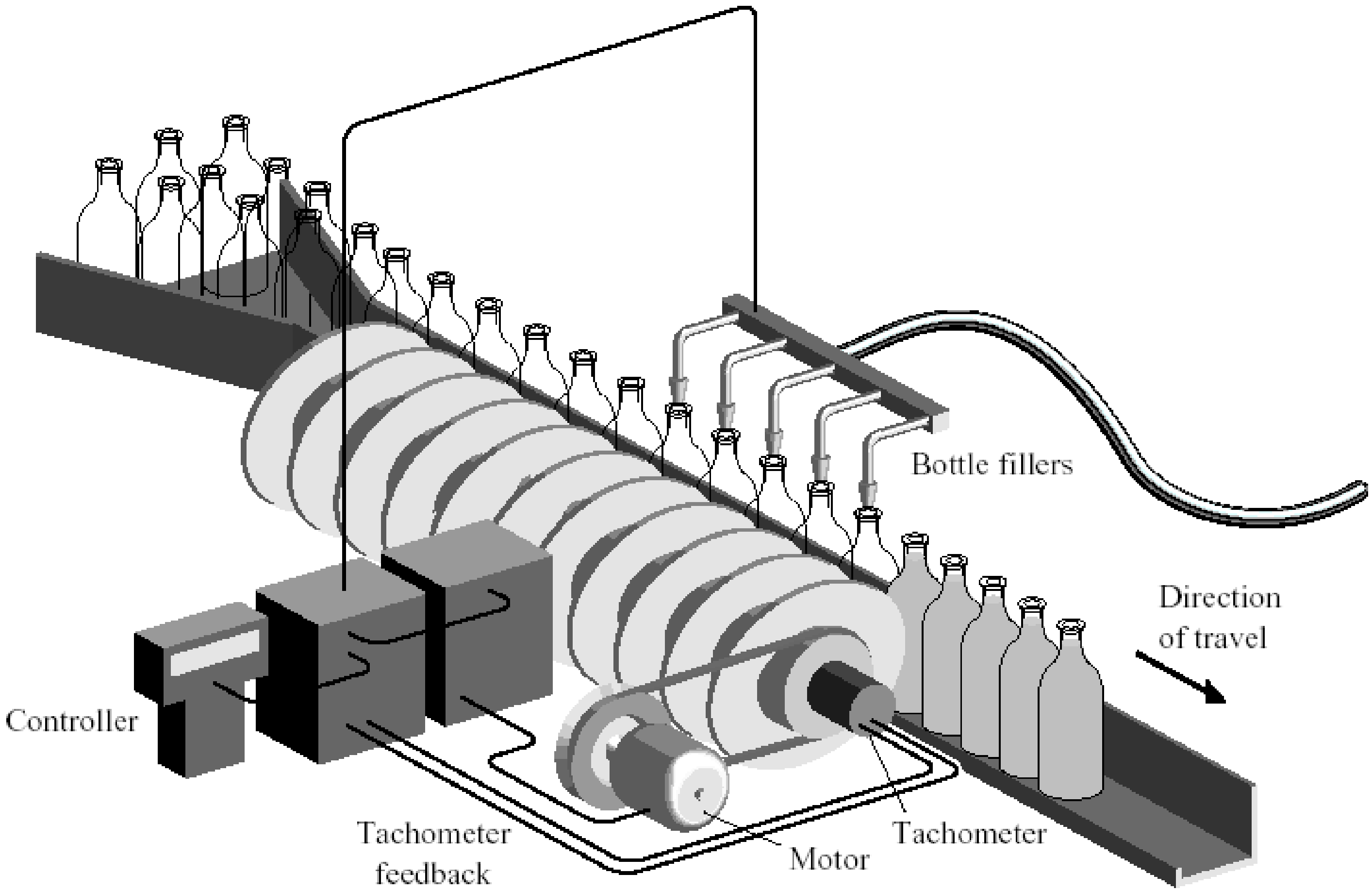


O que aconteceu com o erro em estado estacionário?

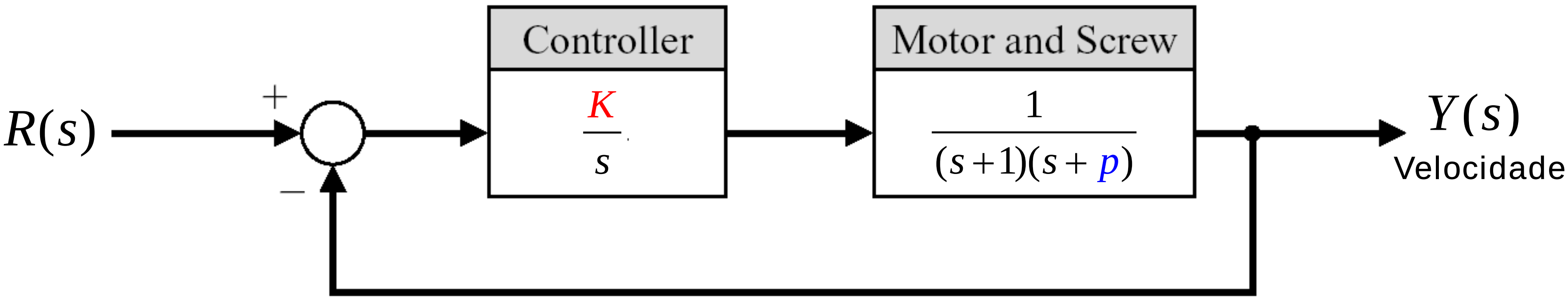
Problema PA6.4 – Dorf & Bishop

- Uma linha de enchimento de garrafas usa um mecanismo de fuso, como mostrado na figura do *slide* a seguir. A retroação do tacômetro é usada para manter o controle preciso da velocidade. Determinar e plotar a faixa de valores de K e p que permitem operação estável.

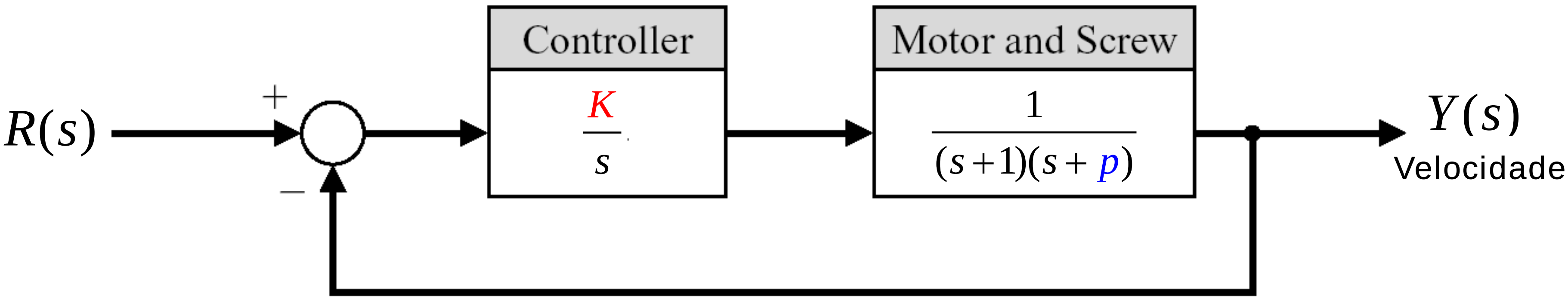
Problema PA6.4 – Dorf & Bishop



Problema PA6.4 – Dorf & Bishop



Problema PA6.4 – Dorf & Bishop



Equação Característica da Malha Fechada:

$$1 + G_c(s)G(s) = 1 + \frac{K}{s(s+1)(s+p)} = 0$$

$$s(s+1)(s+p) + K = s^3 + (p+1)s^2 + ps + K = 0$$

E agora?

Problema PA6.4 – Dorf & Bishop

Arranjo de Routh

$$s(s+1)(s+p)+K=s^3+(p+1)s^2+ps+K=0$$

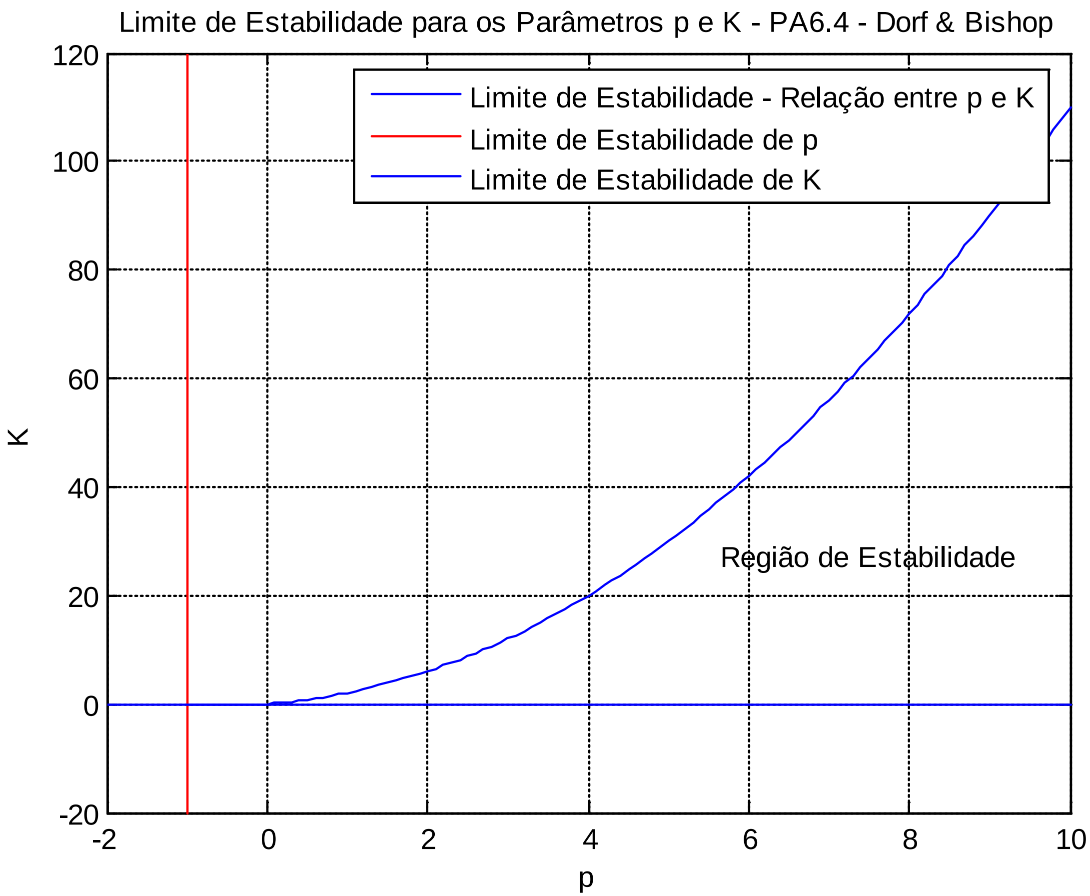
$$\left.\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & p \\ s^2 & (p+1) & K \\ s^1 & b_2 & \\ s^0 & K & \end{array}\right\} \quad b_2=\frac{p(p+1)-K}{(p+1)}>0$$

$$K>0$$

$$(p+1)>0 \rightarrow p>-1$$

$$p(p+1)-K>0 \rightarrow K<p^2+p$$

Problema PA6.4 – Dorf & Bishop



Script em Matlab: PA64_Dorf_Bishop_8Ed.m