Controle de Sistemas

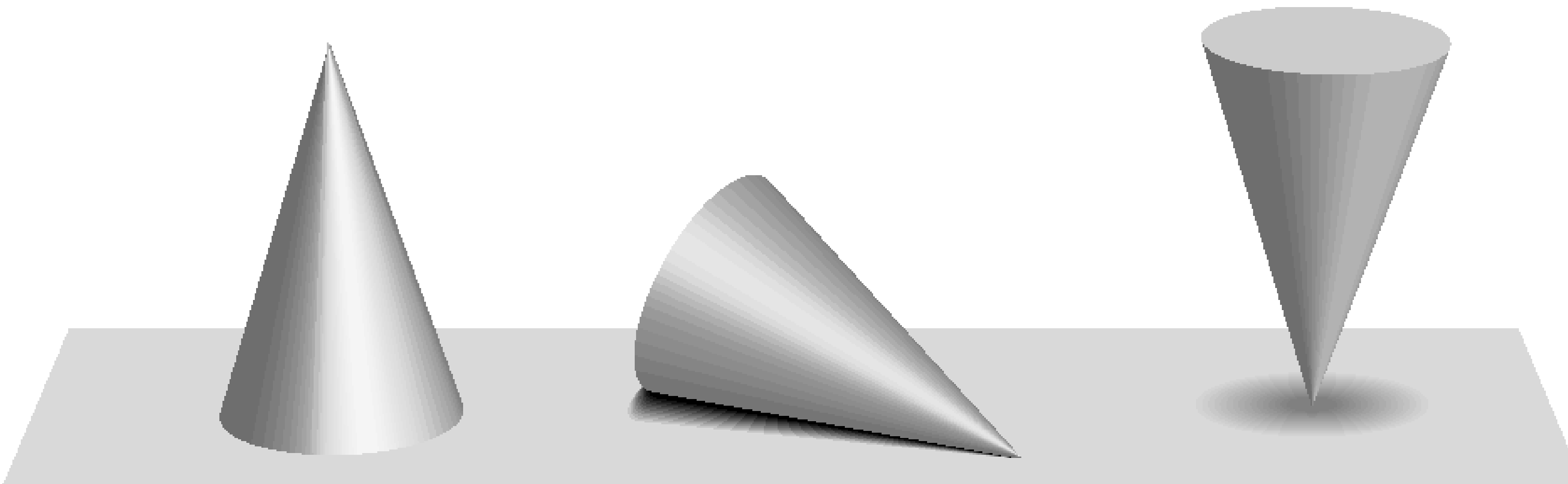
Estabilidade

Renato Dourado Maia

Universidade Estadual de Montes Claros

Engenharia de Sistemas

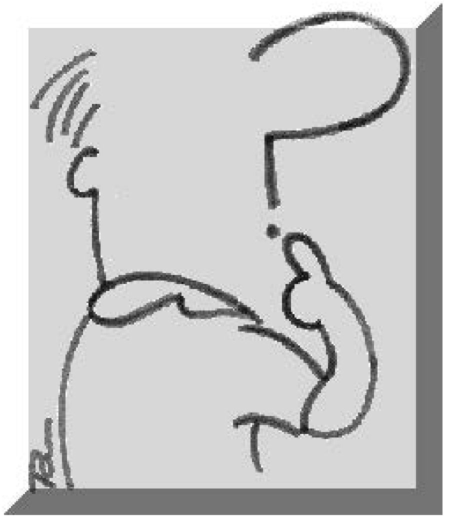
Estabilidade: Uma Idéia Intuitiva...



Estável... Neutro... Instável...

Estabilidade

Mas o que é um sistema estável?



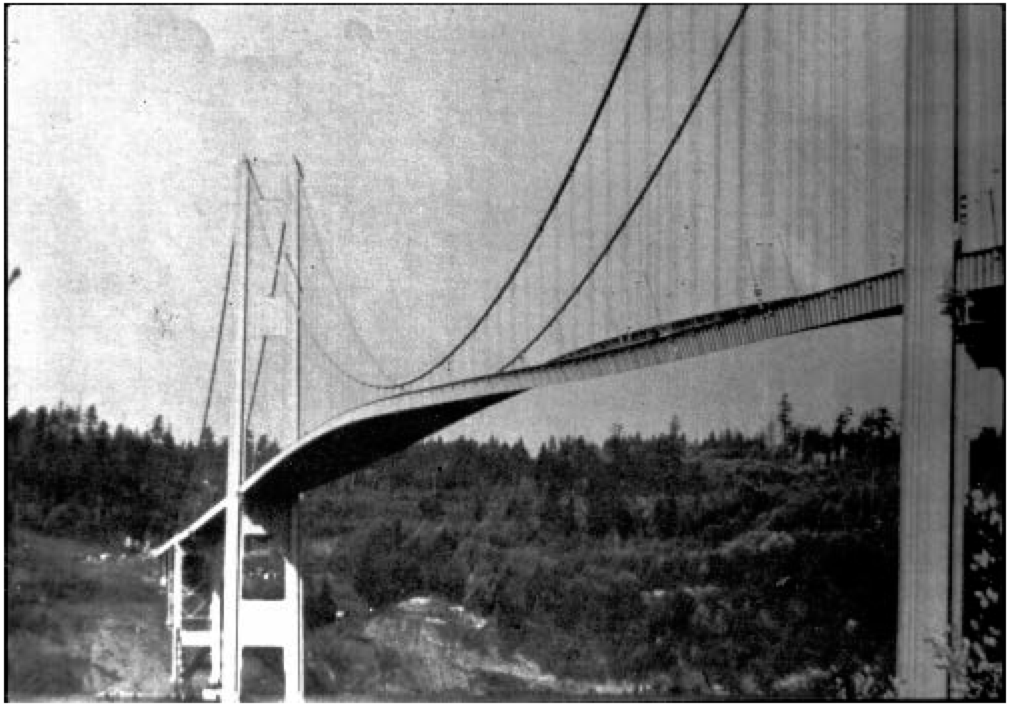
Estabilidade

- Um sistema é estável se, para qualquer entrada limitada, a sua saída é também limitada.

BIBO ➔ *Bounded Input, Bounded Output*

- Ponte sobre o desfiladeiro de Tacoma:
  - Em 7 de novembro de 1940, aproximadamente às 11 horas, a ponte sobre o desfiladeiro de Tacoma começa a entrar em colapso, em função de vibrações geradas por ventos, que não eram fortes... A ponte havia sido aberta para o tráfego há apenas alguns meses... Vejamos um vídeo...

Ponte Sobre o Desfiladeiro de Tacoma

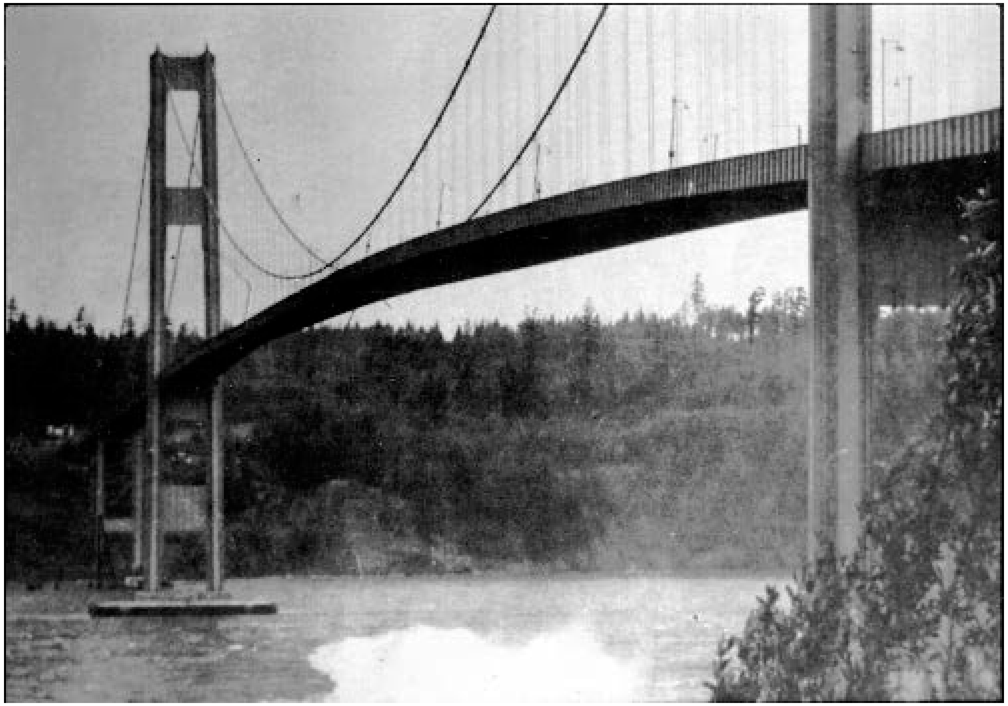


Observem a torção da ponte...

Ponte Sobre o Desfiladeiro de Tacoma

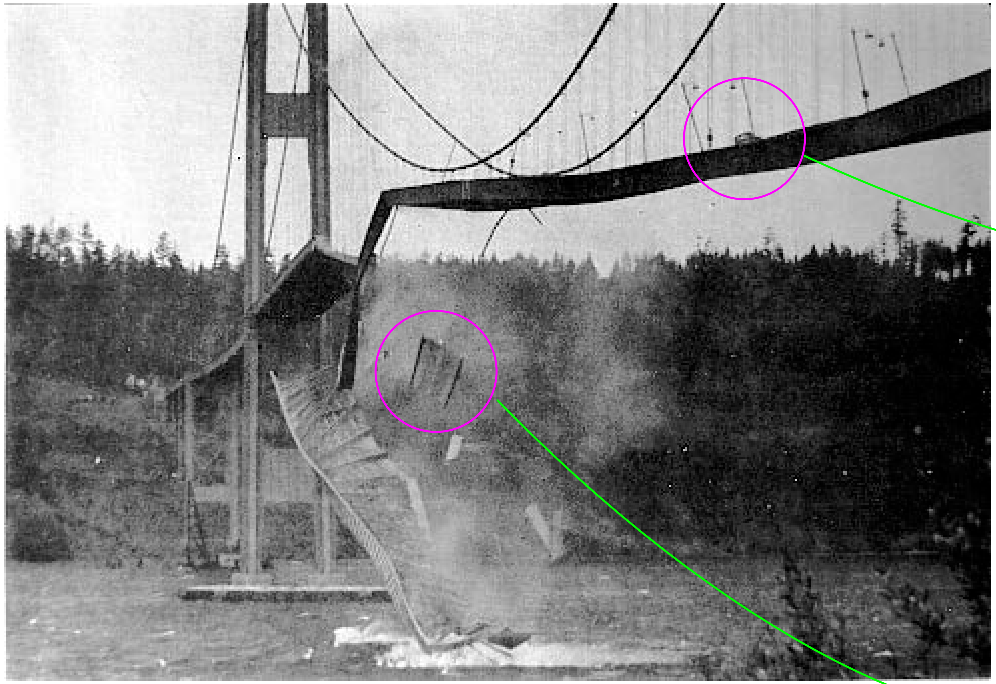
O lado direito está 8,5 metros acima do esquerdo!

Ponte Sobre o Desfiladeiro de Tacoma



O concreto começa a cair...

Ponte Sobre o Desfiladeiro de Tacoma



Um carro!

Seção de pavimento de concreto de 7,6 m!!!

O concreto cai de vez...

Estabilidade

- O conceito de estabilidade é muito importante no projeto de sistemas de controle realimentados: no contexto em que estamos, desejaremos sempre projetar controladores que resultem em sistemas estáveis.

Alguém tem dúvida do porquê disso?

Estabilidade

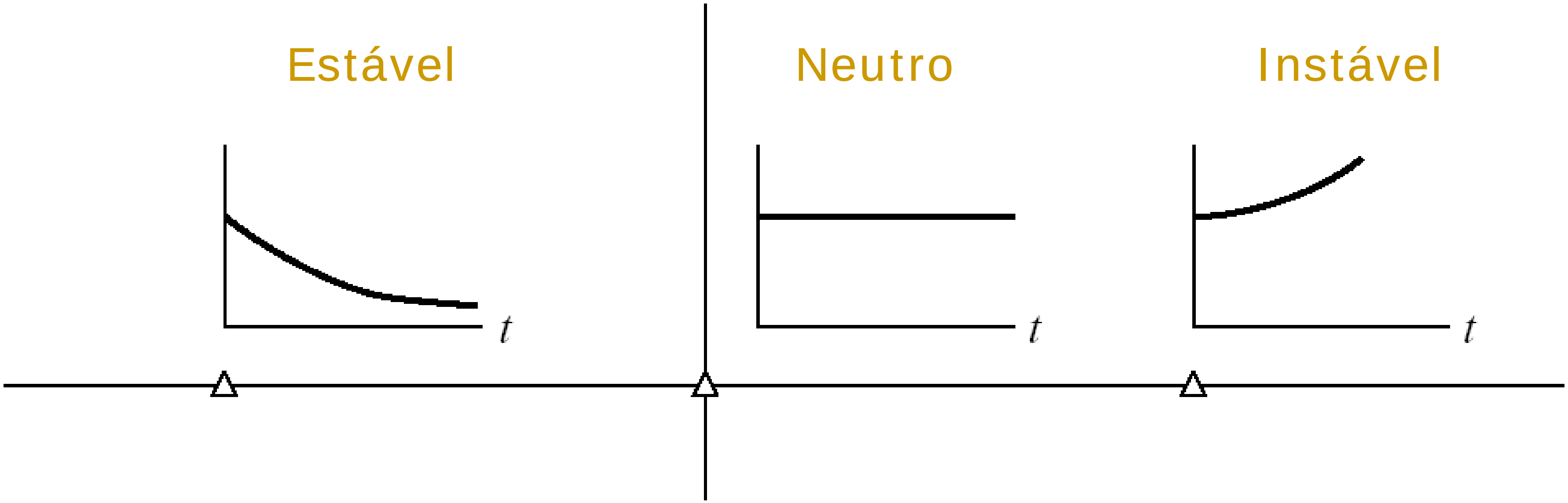
- Genericamente, pode-se dizer que um sistema de controle é estável ou não: esse é o conceito de estabilidade absoluta.

- Dado um sistema em malha fechada estável, graus de estabilidade poderiam ser a ele atribuídos: esse é o conceito de estabilidade relativa.

Estabilidade

- Como já visto:
  - Polos no semiplano esquerdo resultam em resposta decrescente e, no semiplano direito, em resposta crescente; polos no eixo imaginário resultam em respostas neutras.

Estabilidade

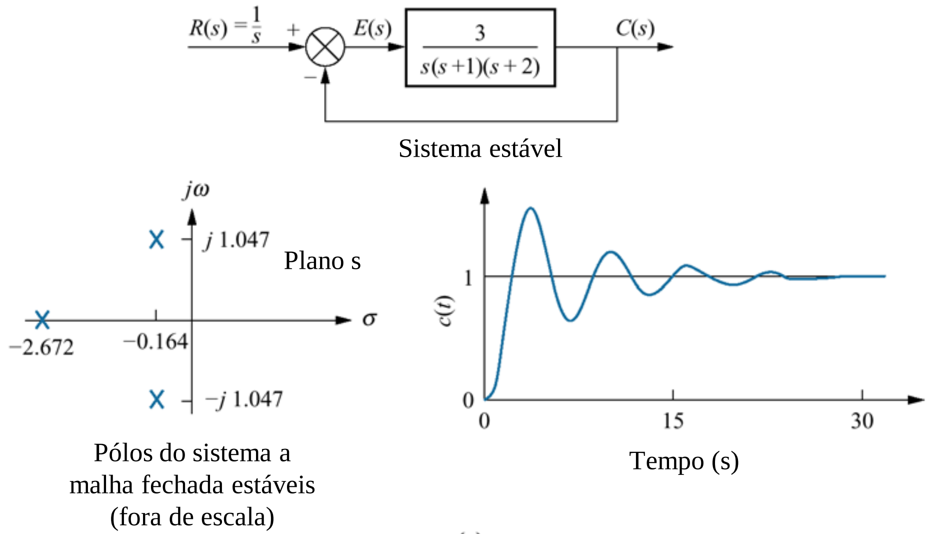


Relação da Localização dos Pólos com a Estabilidade

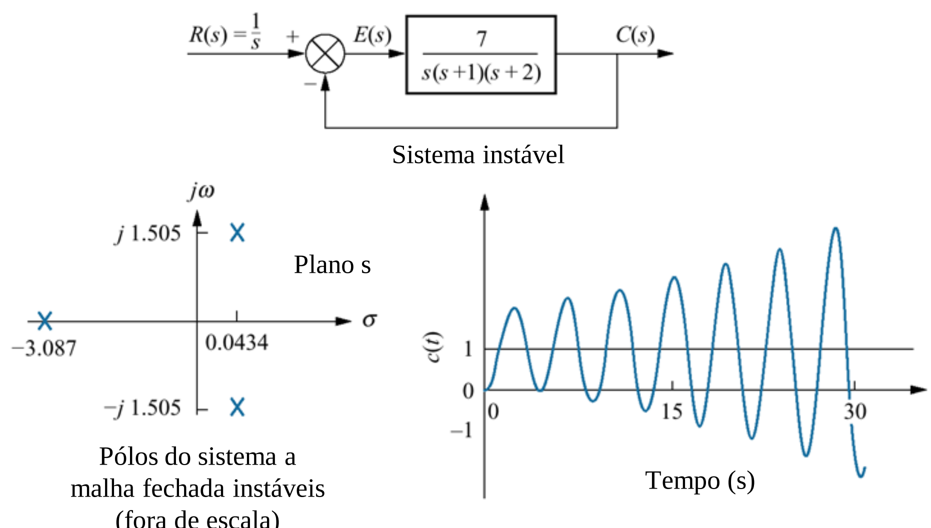
Estabilidade

- Já sabemos, então, que a condição necessária e suficiente para que um sistema linear seja estável é:
  - Todos os polos devem estar no semiplano esquerdo, ou seja, devem possuir parte real negativa.

Estabilidade



(*a*)



(*b*)

Estabilidade

- No caso particular de a equação característica possuir raízes não-múltiplas no eixo imaginário, com todas as demais raízes no semiplano esquerdo, o sistema exibirá oscilações sustentadas, ou seja, será não-amortecido, a menos que a entrada seja um sinal senoidal, que é limitado, cuja frequência seja exatamente igual à raiz sobre o eixo $j\omega$, caso em que a saída é ilimitada. Tal sistema é dito marginalmente estável.

Estabilidade

- Pergunta:
  - Como, então, determinar se um sistema é estável?

Uma maneira possível é achar os polos e verificar suas partes reais... Mas esse método não é interessante, e entenderemos depois o porquê dessa afirmação...

Estabilidade

- Vários métodos foram desenvolvidos para saber se um sistema é estável ou não, sem determinar as raízes de sua equação característica, destacando-se três formulações:
  - Método no plano S – Critério de Routh-Hurwitz.
  - Análise no domínio da frequência.
  - Análise temporal.

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

- É um método que fornece uma resposta direta, do tipo sim ou não, sobre a questão de estabilidade de sistemas lineares...
- O critério de Routh-Hurwitz estabelece condições necessárias e suficientes para que um sistema seja estável. A aplicação do critério é baseada na organização dos coeficientes da equação característica na forma de um arranjo/tabela.

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

- Arranjo/tabela para aplicação do Critério de Routh-Hurwitz:

$$\Delta(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0$$

$$\begin{array}{c|cccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
s^{n-2} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \\
s^{n-3} & c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
s^0 & d_{n-1} & & &
\end{array}$$

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

- Cálculo dos coeficientes do arranjo:

$$b_{n-1} = \frac{(a_{n-1})(a_{n-3}) - a_n(a_{n-3})}{a_{n-1}} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$b_{n-3} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}$$

$$c_{n-1} = \frac{-1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix}$$

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

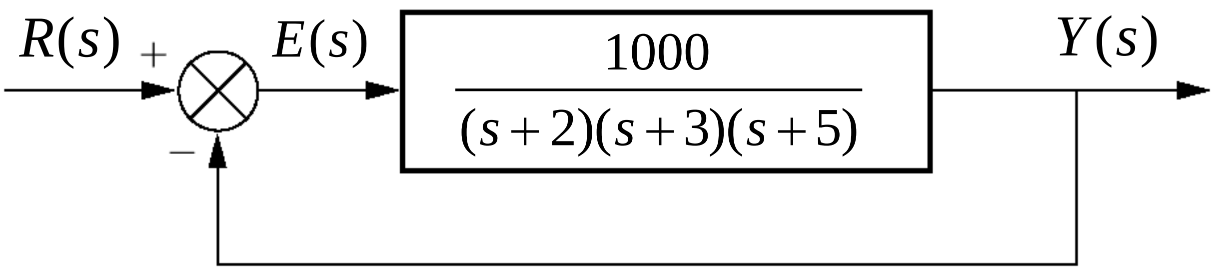
$$R(s) \longrightarrow \boxed{\frac{N(s)}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}} \longrightarrow Y(s)$$

s^4	a_4	a_2	a_0
s^3	a_3	a_1	0
s^2			
s^1			
s^0			

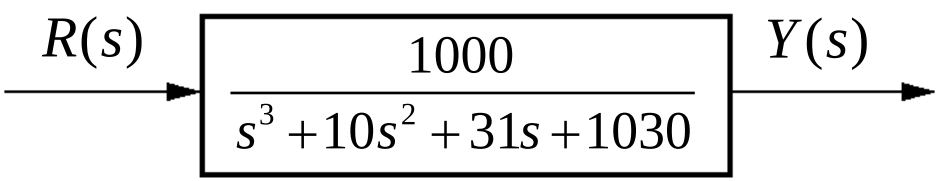
Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

s^4	a_4	a_2	a_0
s^3	a_3	a_1	0
s^2	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}}{a_3} = b_1$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & a_0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = b_2$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & 0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = 0$
s^1	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} = c_1$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$
s^0	$\dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = d_1$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz



(a)



(b)

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

s^3	1	31	0
s^2	$\cancel{10}\ \ 1$	$\cancel{1030}\ \ 103$	0
s^1	$\dfrac{-\begin{vmatrix} 1 & 31 \\ 1 & 103 \end{vmatrix}}{1} = -72$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{1} = 0$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{1} = 0$
s^0	$\dfrac{-\begin{vmatrix} 1 & 103 \\ -72 & 0 \end{vmatrix}}{-72} = 103$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -72 & 0 \end{vmatrix}}{-72} = 0$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -72 & 0 \end{vmatrix}}{-72} = 0$

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

- Pelo critério de Routh-Hurwitz, o número de raízes com partes reais positivas, isto é, localizadas no semiplano direito do plano S, é igual ao número de mudanças de sinal dos elementos da primeira coluna do arranjo de Routh. Assim, a condição necessária e suficiente para que o sistema seja estável é que todos os elementos da primeira coluna tenham o mesmo sinal.

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

- Quatro configurações devem ser consideradas:

  1. Nenhum elemento da primeira coluna é zero.
  2. Há um zero na primeira coluna, mas há elementos na linha que não são nulos.
  3. Há um zero na primeira coluna, e todos os elementos da linha são nulos.
  4. Idêntico ao 3, com raízes múltiplas no eixo imaginário.

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

- Configuração 1 – nenhum elemento da primeira coluna é zero.

Exemplo – Sistema de Segunda Ordem

$$\Delta(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

$$\left.\begin{array}{c|cc} s^2 & a_2 & a_0 \\ s^1 & a_1 & 0 \\ s^0 & b_1 & 0 \end{array}\right\} \qquad b_1 = \frac{(a_1)(a_0) - a_2(0)}{a_1}$$

Um sistema de segunda ordem é estável se todos os coeficientes da EC são positivos, ou se todos são negativos...

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

- Configuração 1 – nenhum elemento da primeira coluna é zero.

Exemplo – Sistema de Terceira Ordem: $\Delta(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$

$$\left.\begin{array}{c|cc} s^3 & a_3 & a_1 \\ s^2 & a_2 & a_0 \\ s^1 & b_1 & 0 \\ s^0 & c_1 & 0 \end{array}\right\} \qquad b_1 = \frac{a_2 a_1 - a_0 a_3}{a_2} \qquad c_1 = \frac{b_1 a_0}{b_1} = a_0$$

Para que um sistema de terceira ordem seja estável, todos os coeficientes devem ser positivos e $a_2 a_1 > a_0 a_3$. Caso $a_2 a_1 = a_0 a_3$, o sistema terá um par de raízes no eixo imaginário (configuração 3), o que resulta em estabilidade marginal.

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

- Configuração 2 – há um zero na primeira coluna, mas há elementos na linha que não são nulos.
  - Nesse caso, o zero é substituído por um parâmetro ε, de valor positivo (ou negativo) desprezível, e que é aproximado para zero depois de montado o arranjo de Routh.

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

Exemplo: $\Delta(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10$

$$
\left.\begin{array}{c|ccc}
s^5 & 1 & 2 & 11 \\
s^4 & 2 & 4 & 10 \\
s^3 & \varepsilon & 6 & 0 \\
s^2 & c_1 & 10 & 0 \\
s^1 & d_1 & 0 & 0 \\
s^0 & 10 & 0 & 0
\end{array}\right\}
$$

$$c_1 = \frac{4\varepsilon - 12}{\varepsilon} = \frac{-12}{\varepsilon}$$

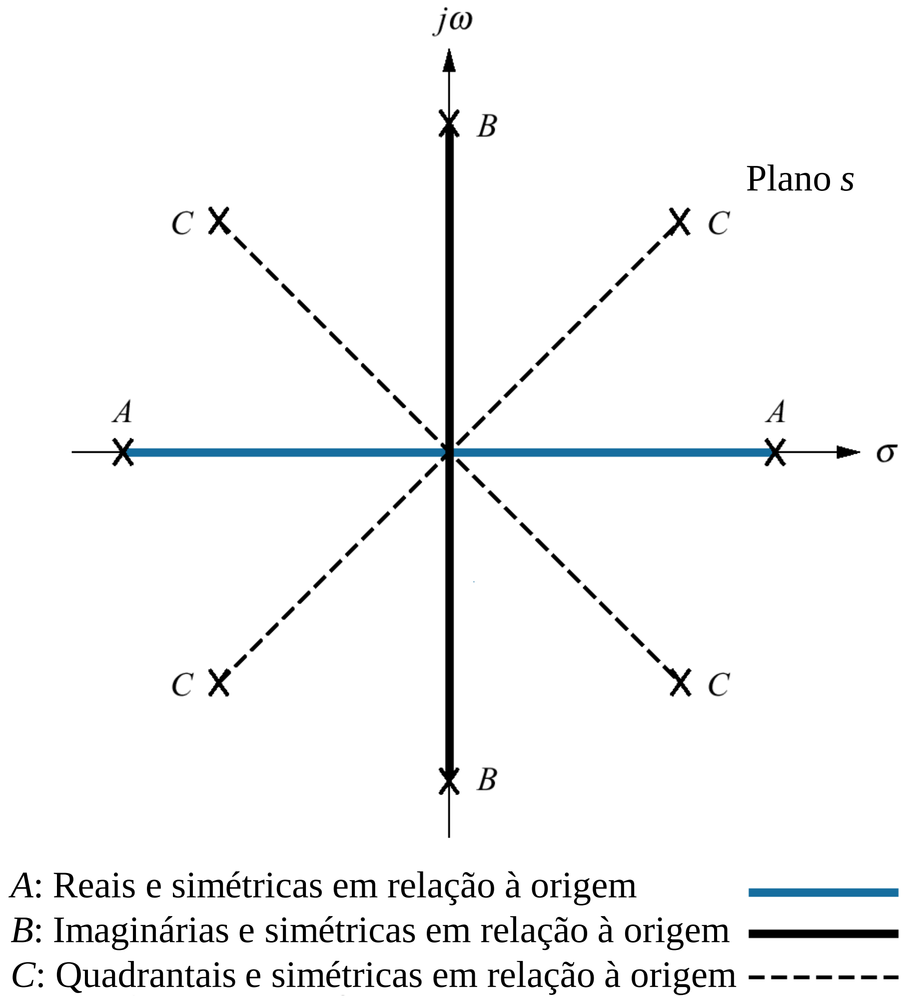
$$d_1 = \frac{6c_1 - 10\varepsilon}{c_1} = 6$$

Como há duas trocas de sinal na primeira coluna, há duas raízes com parte real negativa, e o sistema é instável....

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

- Configuração 3 – há um zero na primeira coluna e todos os elementos na linha em que aparece o zero são também nulos.
  - Essa configuração ocorre quando aparecem fatores do tipo $(s+\sigma)(s-\sigma)$ ou $(s+j\omega)(s-j\omega)$ aparecem na equação característica. Esse problema é contornado por meio da utilização de um polinômio auxiliar, $P(s)$, que é a equação de uma linha que precede a linha de zeros. A ordem do polinômio auxiliar é sempre par e indica o número de pares de raízes simétricas.

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz



Quando o polinômio original possui raízes simétricas em relação à origem, surge uma linha de zeros durante a construção do arranjo.

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

Exemplo: $\Delta(s) = s^3 + 2s^2 + 4s + K$

$$\left.\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 4 \\ s^2 & 2 & K \\ s^1 & b_1 & 0 \\ s^0 & K & 0 \end{array}\right\} \qquad b_1 = \frac{8-K}{2}$$

Para ser estável:

$$0 < K < 8$$

Com $K = 8$, tem-se uma linha com apenas zeros, implicando em estabilidade marginal (duas raízes no eixo imaginário). O polinômio auxiliar nesse caso é dado por:

$$P(s) = 2s^2 + K = 2s^2 + 8 = 2(s^2 + 4) = 2(s + 2j)(s - 2j)$$

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

- Configuração 3 – Para continuar a construção do arranjo, deve-se substituir a linha de zeros pela derivada do polinômio auxiliar $P(s)$ e seguir com o procedimento normalmente...

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

$$T(s) = \frac{10}{s^5 + 7s^4 + 6s^3 + 42s^2 + 8s + 56}$$

s^5	1	6	8
s^4	$\cancel{7}$ 1	$\cancel{42}$ 6	$\cancel{56}$ 8
s^3	$\cancel{0}$ $\cancel{4}$ 1	$\cancel{0}$ $\cancel{12}$ 3	$\cancel{0}$ $\cancel{0}$ 0
s^2	3	8	0
s^1	$\frac{1}{3}$	0	0
s^0	8	0	0

Estável!

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

- Configuração 4 – há raízes múltiplas no eixo i-maginário.
  - Nesse caso, a resposta do sistema é $t[sen(\omega t+\theta)]$ e, portanto, ele é instável. O critério de Routh-Hurwitz não é capaz de revelar essa forma de instabilidade.

Alguns Exemplos (Nise, 3ª Ed. Cap. 6)

$$T_1(s) = \frac{10}{s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 5s + 3}$$

s^5	1	3	5
s^4	2	6	3
s^3	$\cancel{0}\ \epsilon$	$\frac{7}{2}$	0
s^2	$\frac{6\epsilon - 7}{\epsilon}$	3	0
s^1	$\frac{42\epsilon - 49 - 6\epsilon^2}{12\epsilon - 14}$	0	0
s^0	3	0	0

Rótulo	Primeira coluna	$\epsilon = +$	$\epsilon = -$
s^5	1	$+$	$+$
s^4	2	$+$	$+$
s^3	$\cancel{0}\ \epsilon$	$+$	$-$
s^2	$\frac{6\epsilon - 7}{\epsilon}$	$-$	$+$
s^1	$\frac{42\epsilon - 49 - 6\epsilon^2}{12\epsilon - 14}$	$+$	$+$
s^0	3	$+$	$+$

Instável!

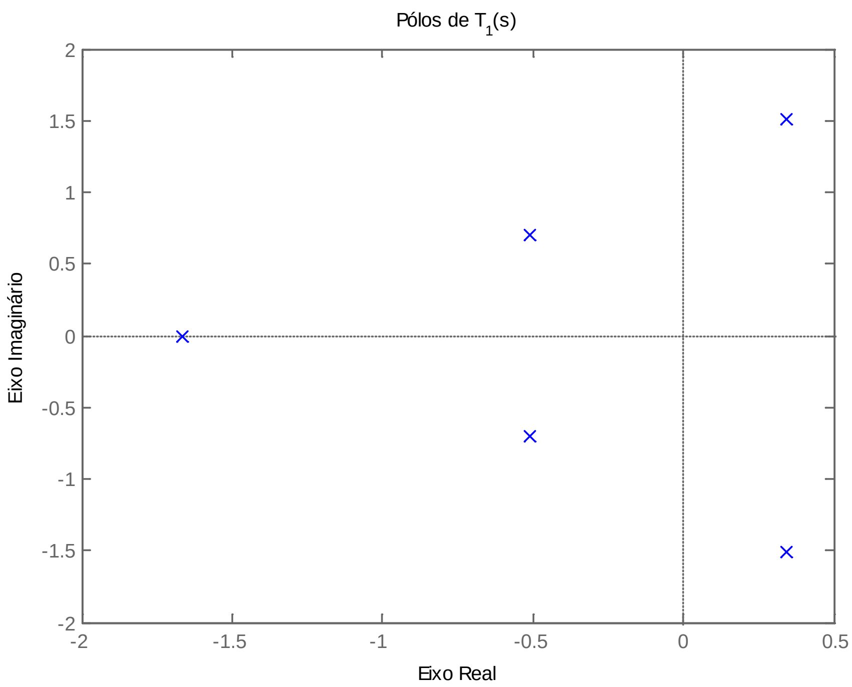
Alguns Exemplos (Nise, 3ª Ed. Cap. 6)

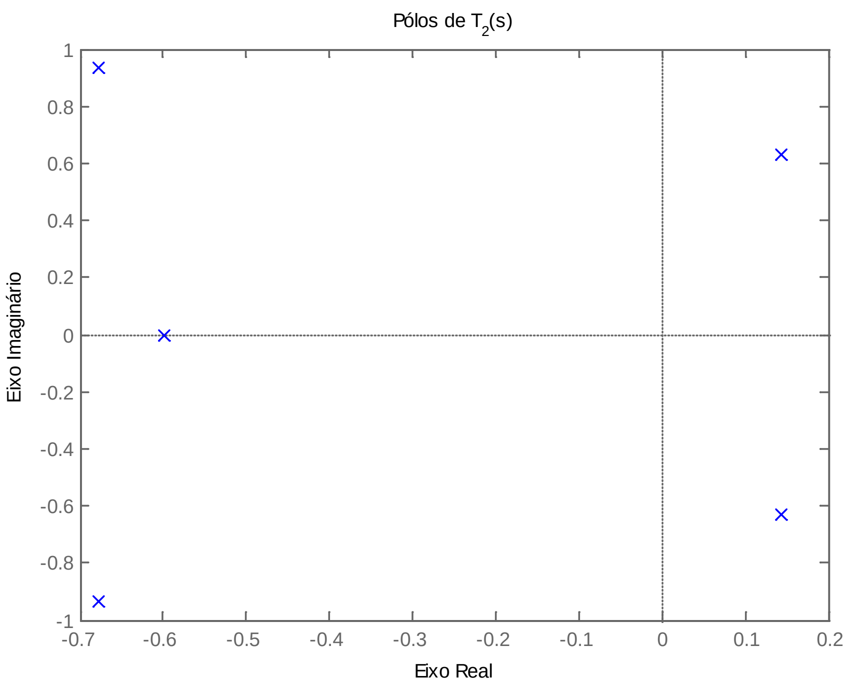
- Para o exemplo do *slide* anterior, há uma aborda-gem alternativa, baseada na proprieda-de de polinômios com raízes recíprocas, que é escrever o denominador com os coeficientes na ordem inversa:

$$T_1(s) = \frac{10}{s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 5s + 3}$$

$$T_2(s) = \frac{10}{3s^5 + 5s^4 + 6s^3 + 3s^2 + 2s + 1}$$

Alguns Exemplos (Nise, 3ª Ed. Cap. 6)





Para polinômios com raízes recíprocas, a distribuição das raízes no plano *S* se mantém...

Alguns Exemplos (Nise, 3ª Ed. Cap. 6)

$$T_2(s) = \frac{10}{3s^5 + 5s^4 + 6s^3 + 3s^2 + 2s + 1}$$

s^5	3	6	2
s^4	5	3	1
s^3	4.2	1.4	
s^2	1.33	1	
s^1	-1.75		
s^0	1		

Alguns Exemplos (Nise, 3ª Ed. Cap. 6)

$$T(s) = \frac{20}{s^8 + s^7 + 12s^6 + 22s^5 + 39s^4 + 59s^3 + 48s^2 + 38s + 20}$$

s^8	1	12	39	48	20
s^7	1	22	59	38	0
s^6	$-\cancel{10}\ -1$	$-\cancel{20}\ -2$	$\cancel{10}\ 1$	$\cancel{20}\ 2$	0
s^5	$\cancel{20}\ 1$	$\cancel{60}\ 3$	$\cancel{40}\ 2$	0	0
s^4	1	3	2	0	0
s^3	$\cancel{0}\ \cancel{4}\ 2$	$\cancel{0}\ \cancel{6}\ 3$	$\cancel{0}\ \cancel{0}\ 0$	0	0
s^2	$\cancel{\frac{3}{2}}\ 3$	$\cancel{2}\ 4$	0	0	0
s^1	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0
s^0	4	0	0	0	0

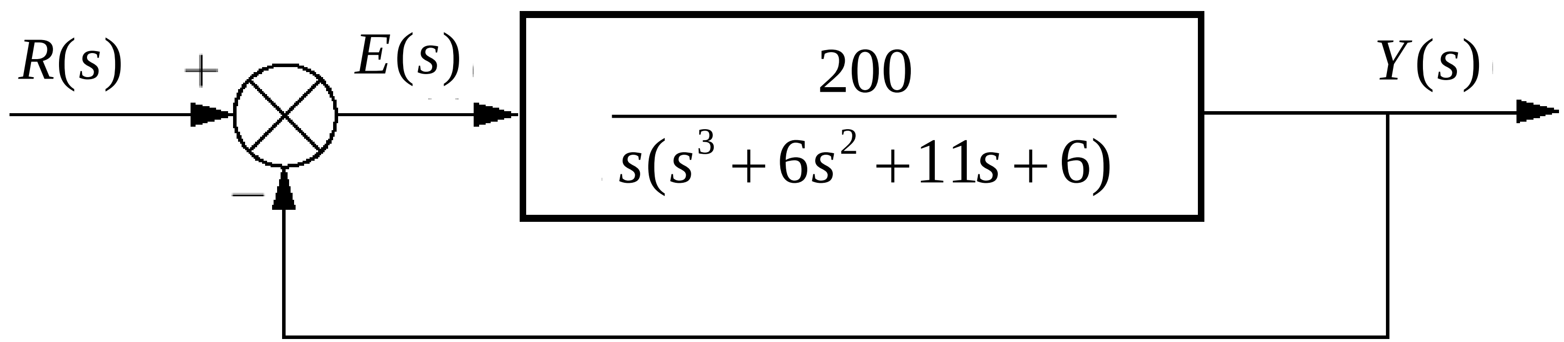
Alguns Exemplos (Nise, 3ª Ed. Cap. 6)

$$T(s) = \frac{20}{s^8 + s^7 + 12s^6 + 22s^5 + 39s^4 + 59s^3 + 48s^2 + 38s + 20}$$

Par (quarta ordem)	Resto (quarta ordem)	Total (oitava ordem)
0 spd 0 spe 4 $j\omega$	2 spd 2 spe 0 $j\omega$	2 spd 2 spe 4 $j\omega$

Nota: spd = semiplano da direita; spe = semiplano da esquerda

Alguns Exemplos (Nise, 3ª Ed. Cap. 6)

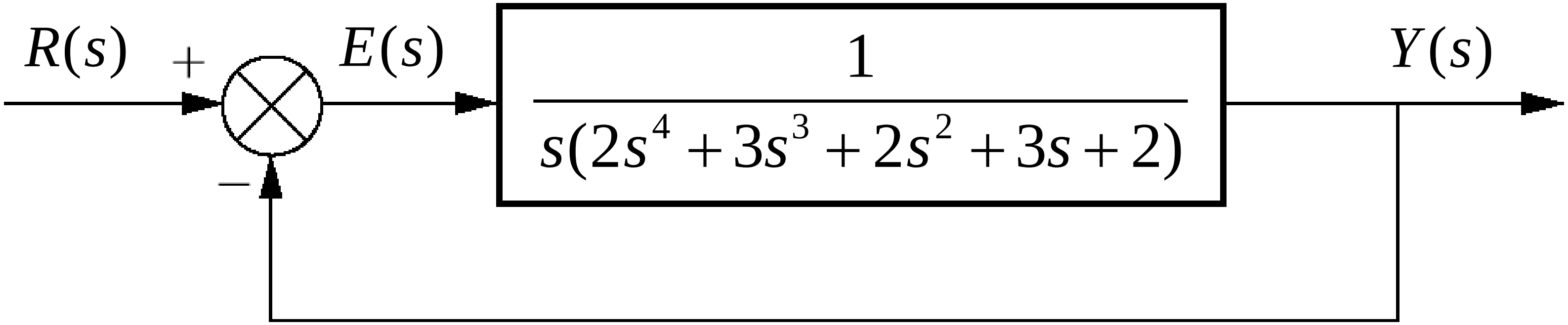


Alguns Exemplos (Nise, 3ª Ed. Cap. 6)

$$T(s) = \frac{200}{s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + 200}$$

s^4	1	11	200
s^3	$\cancel{6}$ 1	$\cancel{6}$ 1	
s^2	$\cancel{10}$ 1	$\cancel{200}$ 20	
s^1	-19		
s^0	20		

Alguns Exemplos (Nise, 3ª Ed. Cap. 6)



Alguns Exemplos (Nise, 3ª Ed. Cap. 6)

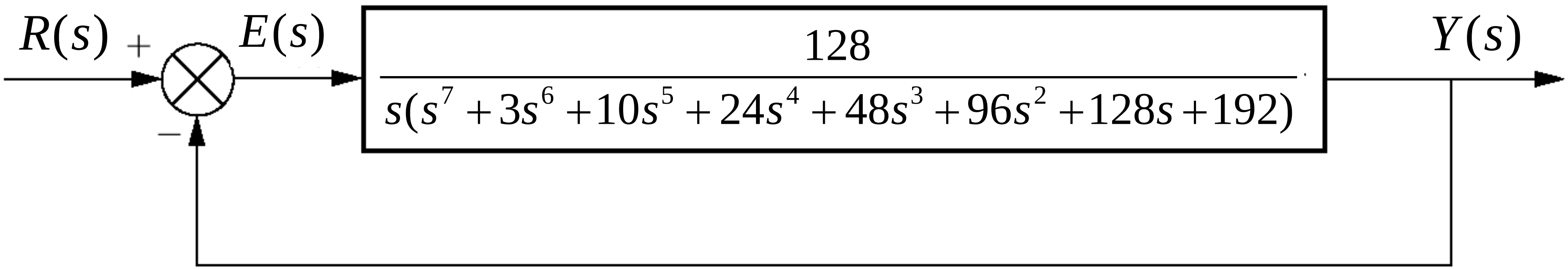
$$T(s)=\frac{1}{2s^5+3s^4+2s^3+3s^2+2s+1}$$

s^5	2	2	2
s^4	3	3	1
s^3	$\cancel{0}\ \epsilon$	$\frac{4}{3}$	
s^2	$\frac{3\epsilon-4}{\epsilon}$	1	
s^1	$\frac{12\epsilon-16-3\epsilon^2}{9\epsilon-12}$		
s^0	1		

s^5	1	3	3
s^4	2	2	2
s^3	2	2	
s^2	$\cancel{0}\ \epsilon$	2	
s^1	$\frac{2\epsilon-4}{\epsilon}$		
s^0	2		

Coeficientes na ordem inversa

Alguns Exemplos (Nise, 3ª Ed. Cap. 6)



Alguns Exemplos (Nise, 3ª Ed. Cap. 6)

$$T(s)=\frac{128}{s^8+3s^7+10s^6+24s^5+48s^4+96s^3+128s^2+192s+128}$$

s^8	1	10	48	128	128
s^7	$\cancel{3}\ \ 1$	$\cancel{24}\ \ 8$	$\cancel{96}\ \ 32$	$\cancel{192}\ \ 64$	
s^6	$\cancel{2}\ \ 1$	$\cancel{16}\ \ 8$	$\cancel{64}\ \ 32$	$\cancel{128}\ \ 64$	
s^5	$\cancel{0}\ \ \cancel{6}\ \ 3$	$\cancel{0}\ \ \cancel{32}\ \ 16$	$\cancel{0}\ \ \cancel{64}\ \ 32$	$\cancel{0}\ \ \cancel{0}\ \ 0$	
s^4	$\cancel{\frac{8}{3}}\ \ 1$	$\cancel{\frac{64}{3}}\ \ 8$	$\cancel{64}\ \ 24$		
s^3	$\cancel{-8}\ \ -1$	$\cancel{-40}\ \ -5$			
s^2	$\cancel{3}\ \ 1$	$\cancel{24}\ \ 8$			
s^1	3				
s^0	8				

Alguns Exemplos (Nise, 3ª Ed. Cap. 6)

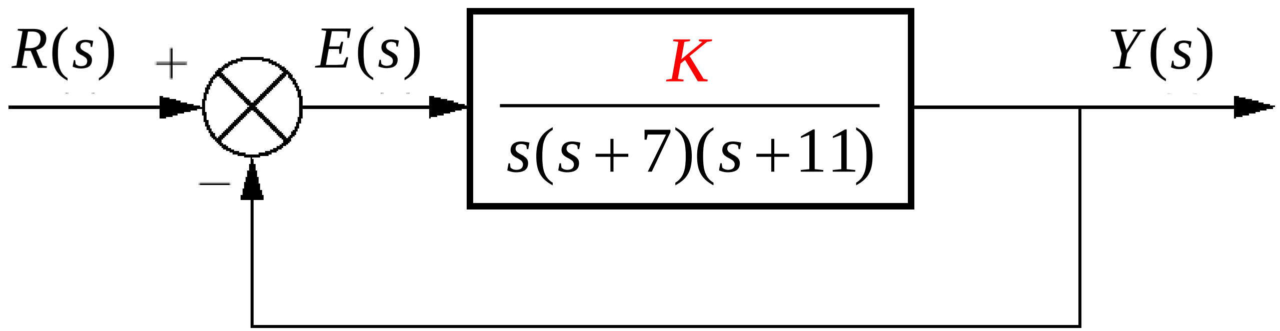
$$T(s) = \frac{128}{s^8 + 3s^7 + 10s^6 + 24s^5 + 48s^4 + 96s^3 + 128s^2 + 192s + 128}$$

Par (sexta ordem)	Resto (segunda ordem)	Total (oitava ordem)
2 spd 2 spe 2 $j\omega$	0 spd 2 spe 0 $j\omega$	2 spd 4 spe 2 $j\omega$

Nota: spd = semiplano da direita; spe = semiplano da esquerda

Alguns Exemplos (Nise, 3ª Ed. Cap. 6)

- Determinar a faixa de valores de K para a qual o sistema a seguir é estável:



Alguns Exemplos (Nise, 3ª Ed. Cap. 6)

$$T(s) = \frac{K}{s^3 + 18s^2 + 77s + K}$$

s^3	1	77
s^2	18	K
s^1	$\frac{1386 - K}{18}$	
s^0	K	

$$K < 1386$$