Controle de Sistemas

Desempenho de Sistemas de Controle

Renato Dourado Maia

Universidade Estadual de Montes Claros

Engenharia de Sistemas

Resposta Transitória de Sistemas de Ordem Superior

- A resposta ao degrau de um sistema de ordem superior será uma combinação de respostas de fatores de primeira ordem e de fatores de segunda ordem:

$$y(t) = A_0 + \sum_{i=1}^{n_1} A_i e^{-\sigma_i t} + \sum_{i=n_1+1}^{n} A_i \frac{e^{-\alpha_i t}}{\sqrt{1-\zeta_i^2}} sen(\omega_{d,i} t + \theta_i)$$

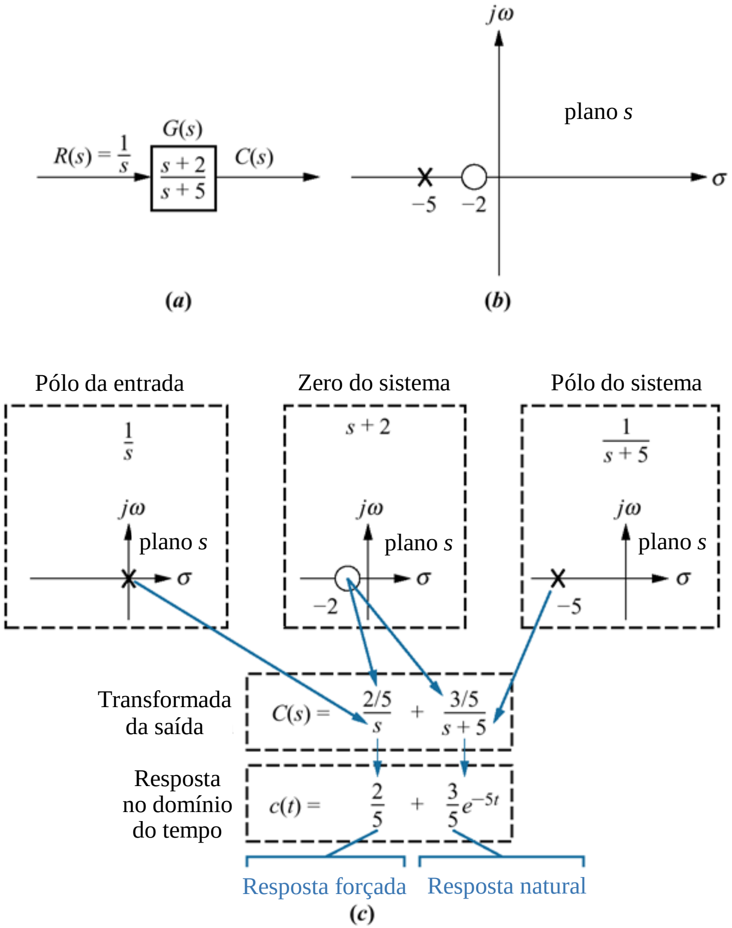
Até agora falamos apenas em polos... Mas e o efeito dos zeros?

O efeito dos zeros da função de transferência sobre a resposta transitória é atenuar o efeito dos polos em suas proximidades, influenciando os coeficientes A_i(frações parciais).

Resposta Transitória de Sistemas de Ordem Superior

Polos aparentemente dominantes podem ter o seu efeito na resposta transitória reduzido pela presença de zeros em sua proximidade!!!

Resposta Transitória de Sistemas de Ordem Superior



Resposta Transitória de Sistemas de Ordem Superior

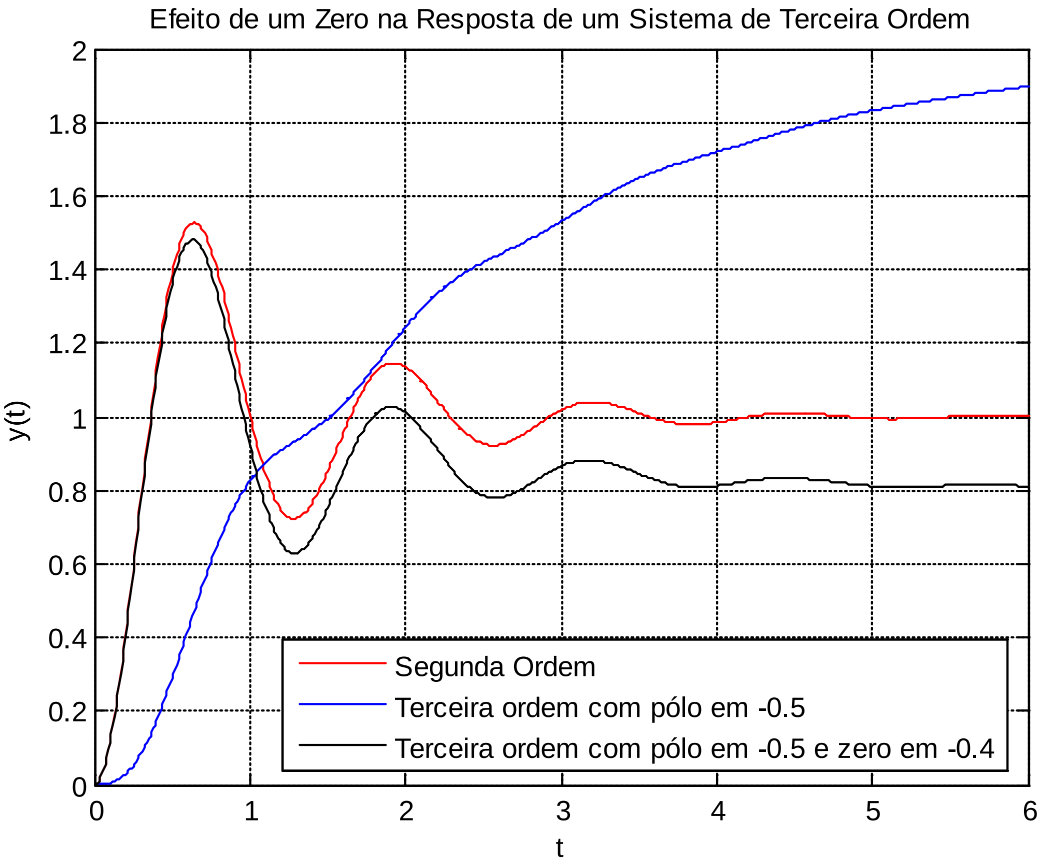
Exemplo

$$G_1(s)=\frac{5^2}{(s+0,5)(s^2+2s+5^2)} \qquad G_2(s)=\frac{5^2(s+0.4)}{(s+0,5)(s^2+2s+5^2)}$$

$$y_1(t)=1-1,03e^{-t/2}+0,05\frac{e^{-t}}{\sqrt{1-0,2^2}}sen(4,899t+78,46°)$$

$$y_2(t)=1+0,26e^{-t/2}-0,64\frac{e^{-t}}{\sqrt{1-0,2^2}}sen(4,899t+78,46°)$$

Resposta Transitória de Sistemas de Ordem Superior



Script em Matlab: M_6_DesempenhoSistemasProg1.m

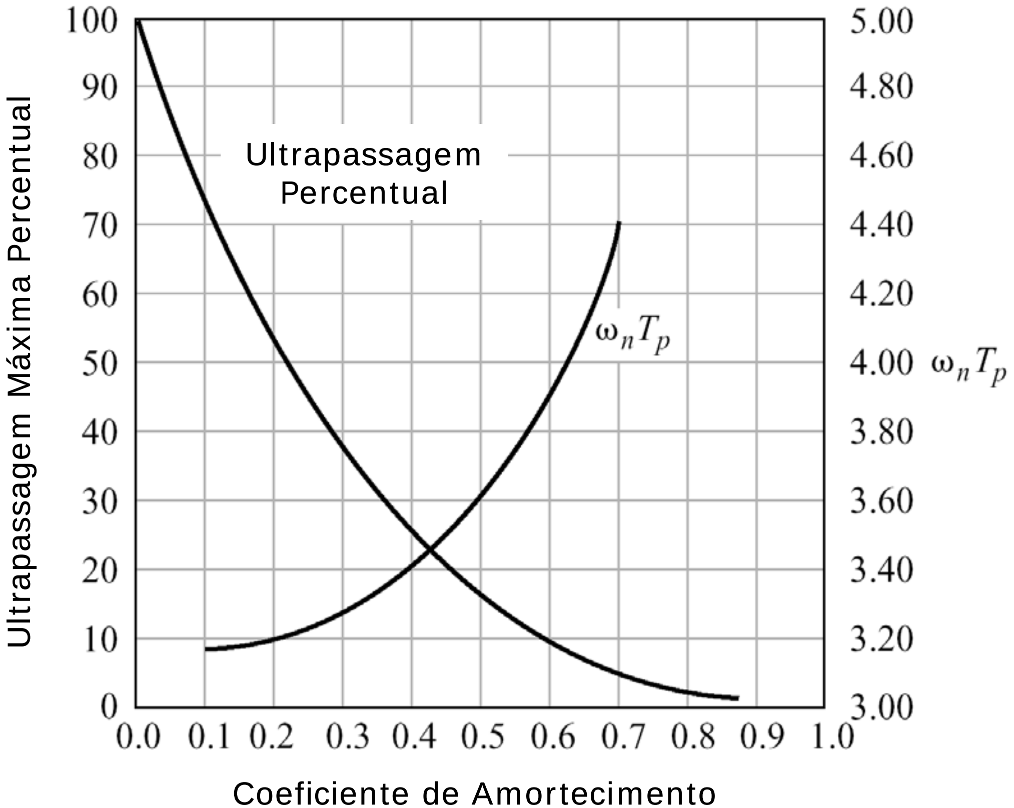
Estimação do Fator de Amortecimento

- Para se estimar o fator de amortecimento, deve-se medir a ultrapassagem percentual e utilizar a equação deduzida na aula passada:

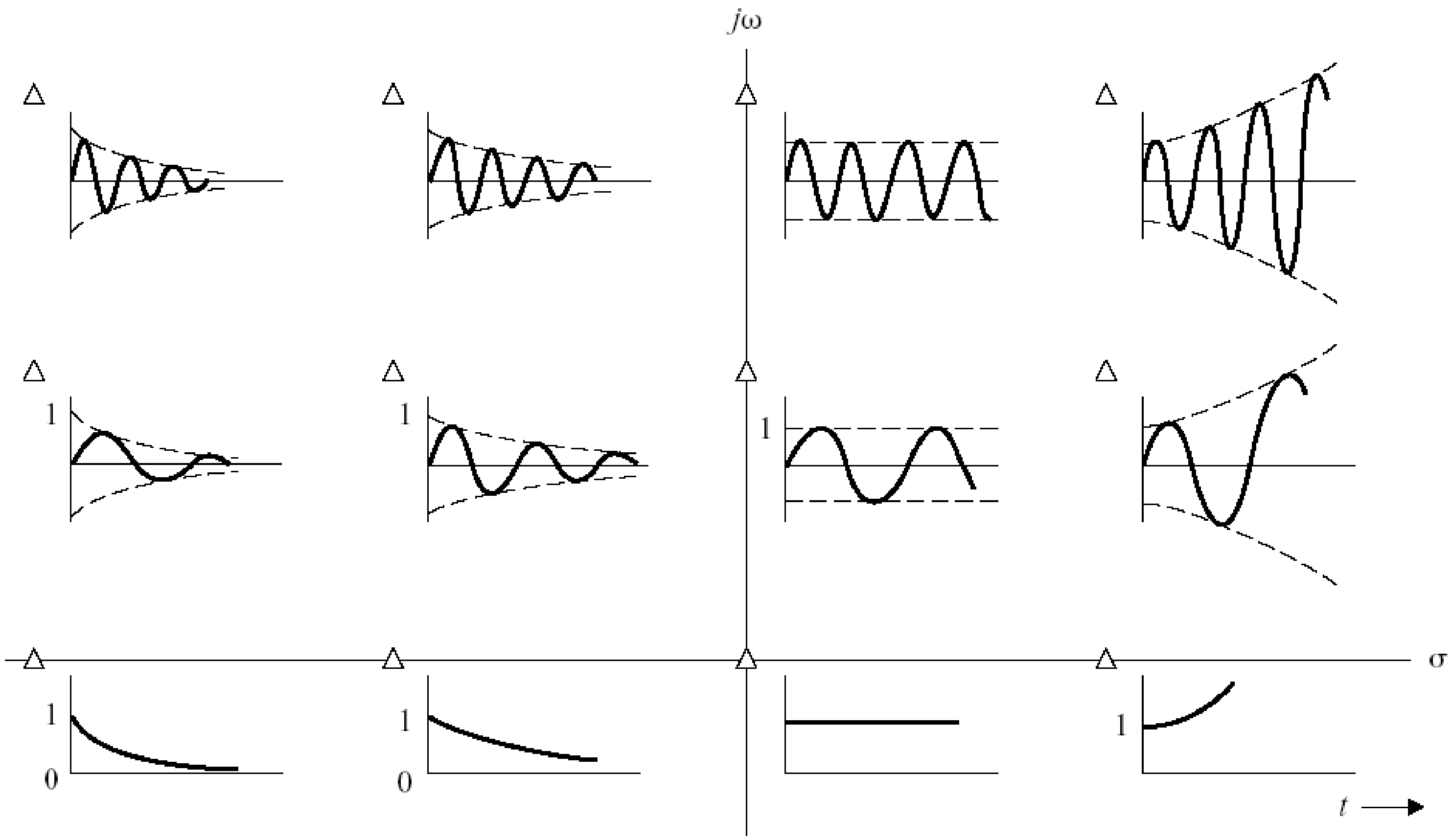
$$U.P = 100e^{-\zeta\pi / \sqrt{1-\zeta^2}}$$

Estimação do Fator de Amortecimento

Ultrapassagem Percentual e Tempo de Pico Normalizado versus Relação de Amortecimento

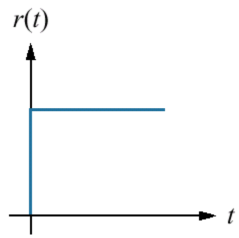
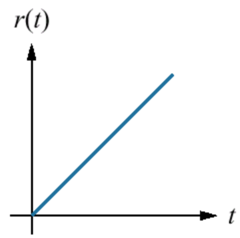
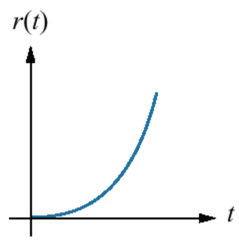


Localização dos Polos e Resposta Transitória

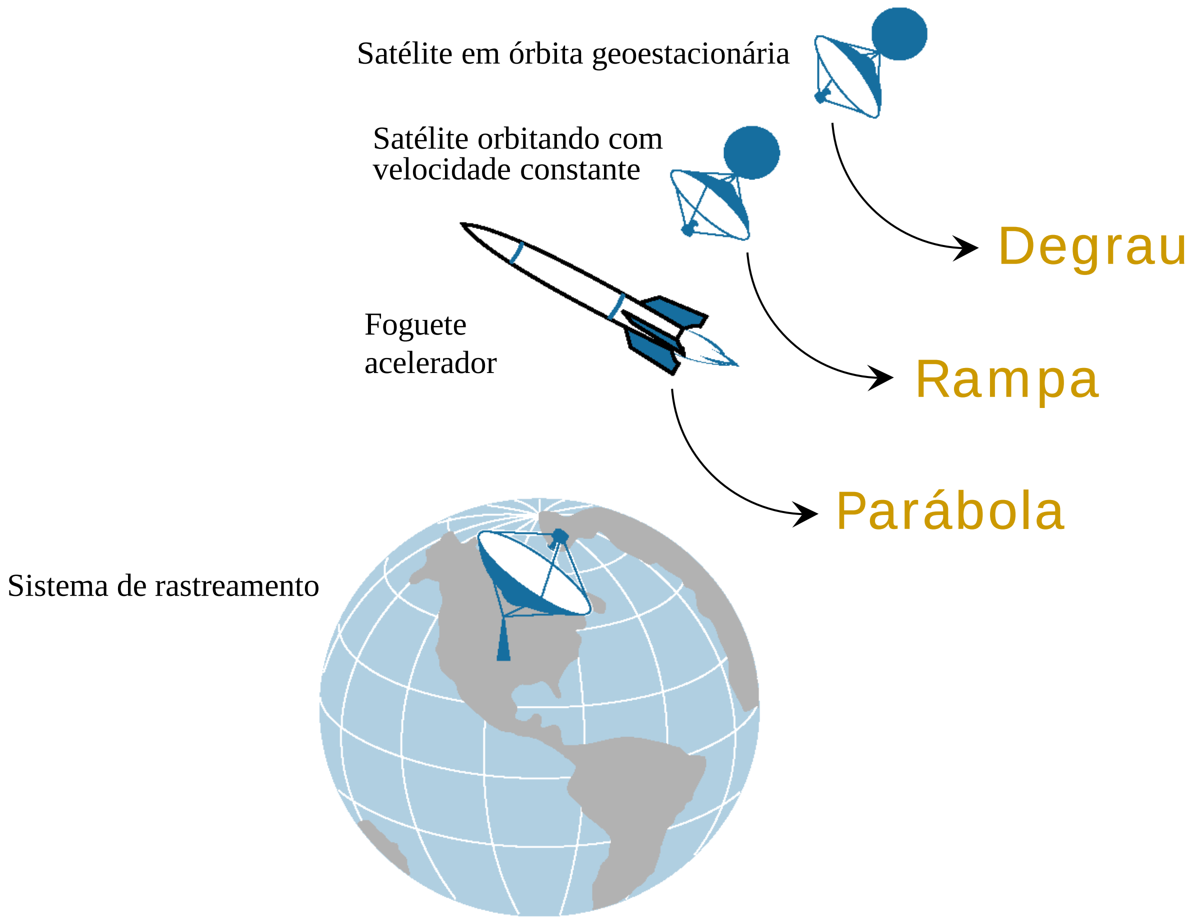


Respostas ao Impulso para Diferentes Localizações dos Polos

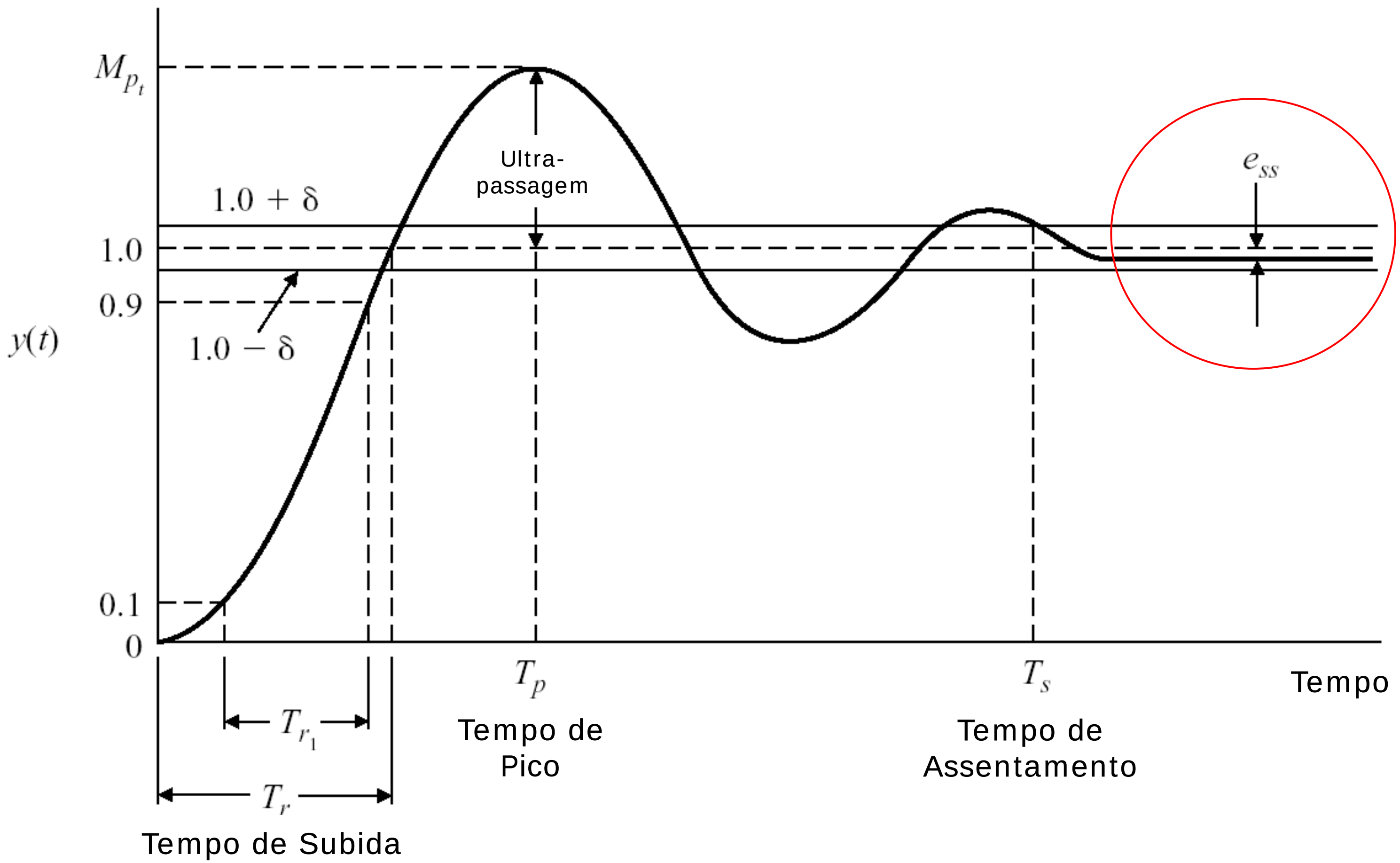
Sinais de Teste

Forma de onda	Nome	Interpretação física	Função do tempo	Transformada de Laplace
	Degrau	Posição constante	1	$\frac{1}{s}$
	Rampa	Velocidade constante	t	$\frac{1}{s^2}$
	Parábola	Aceleração constante	$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{s^3}$

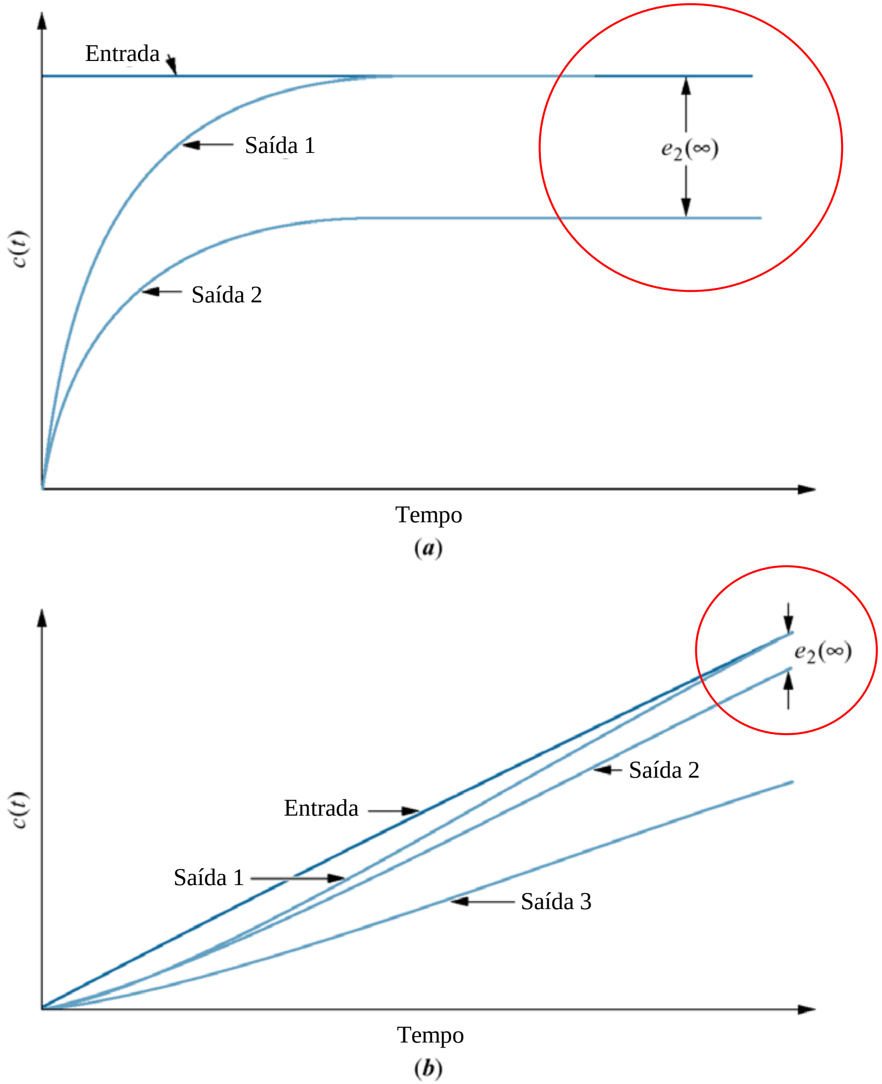
Sinais de Teste



Erro em Estado Estacionário



Erro em Estado Estacionário

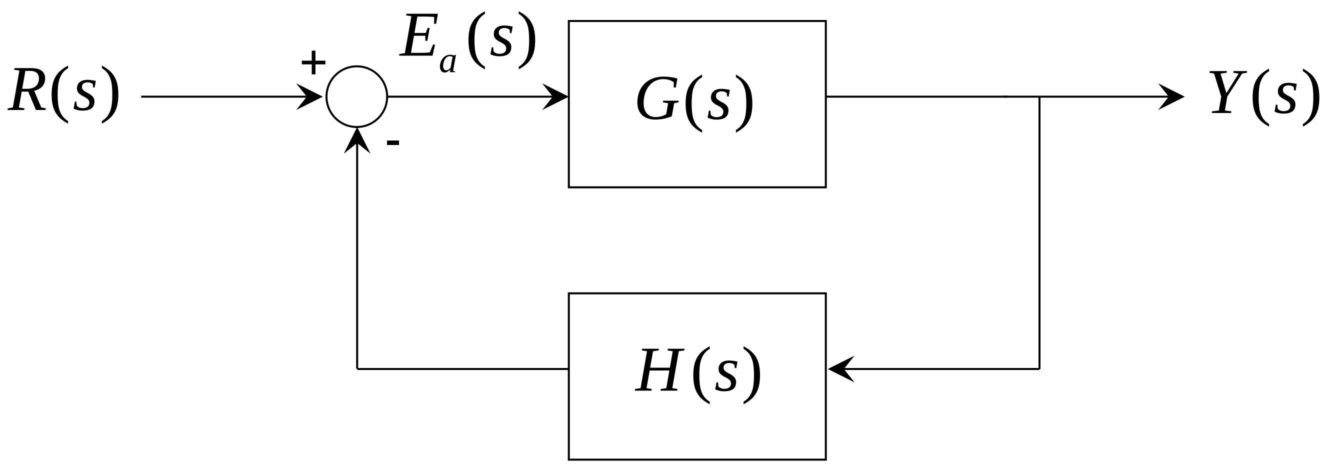


(a) Degrau.

(b) Rampa.

Erro em Estado Estacionário

- Considere o sistema a seguir:



Para $H(s)=1$, o "erro" é dado por:

$$E(s)=R(s)-Y(s)=E_a(s)=\frac{1}{1+G(s)}R(s)$$

Erro em Estado Estacionário

- Ganho DC: o ganho DC de uma função de transferência estável, sem polos na origem, é definido por:

$$Ganho\ DC \triangleq \lim_{s \to 0} G(s) = G(0)$$

- Tipo do Sistema: o tipo do sistema em malha fechada é definido pelo número de integradores, ou polos em $s = 0$, da função de transferência em malha aberta, G(s) (sistema tipo 0: não há integrador, etc.).

Erro em Estado Estacionário

- Para uma entrada tipo degrau unitário: $E(s)=\frac{1}{1+G(s)}\frac{1}{s}$

Aplicando-se o Teorema do Valor Final:

$$e_{ss}=e(\infty)=\lim_{s\to 0}E(s)=\lim_{s\to 0}\frac{1}{1+G(s)}=\frac{1}{1+\lim_{s\to 0}G(s)}=\frac{1}{1+K_p}$$

Constante de Erro de Posição

$$K_p \triangleq \lim_{s\to 0}G(s)=G(0)$$

Sistema Tipo 0: $K_p = Ganho\ DC \Rightarrow e_{ss}=\frac{1}{1+Ganho\ DC}$

Erro em Estado Estacionário

- Para uma entrada tipo rampa unitária: $E(s) = \dfrac{1}{1+G(s)}\dfrac{1}{s^2}$

Aplicando-se o Teorema do Valor Final:

$$e_{ss} = e(\infty) = \lim_{s\to 0} E(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s + sG(s)} = \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} sG(s)} = \frac{1}{1+K_v}$$

Constante de Erro de Velocidade

$$K_v \triangleq \lim_{s\to 0} sG(s)$$

Sistema Tipo 0: $K_v = 0 \Rightarrow e_{ss} = \infty$

Sistema Tipo 1: $e_{ss} = \dfrac{1}{K_v}$

Erro em Estado Estacionário

- Para uma entrada tipo parábola unitária:

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)} \frac{1}{s^3} \Rightarrow e_{ss} = \frac{1}{K_a}$$

Constante de Erro de Aceleração

$$K_a \triangleq \lim_{s \to 0} s^2 G(s)$$

Sistema Tipo 0 ou 1: $K_a = 0 \Rightarrow e_{ss} = \infty$

Sistema Tipo 2: $e_{ss} = \dfrac{1}{K_a}$

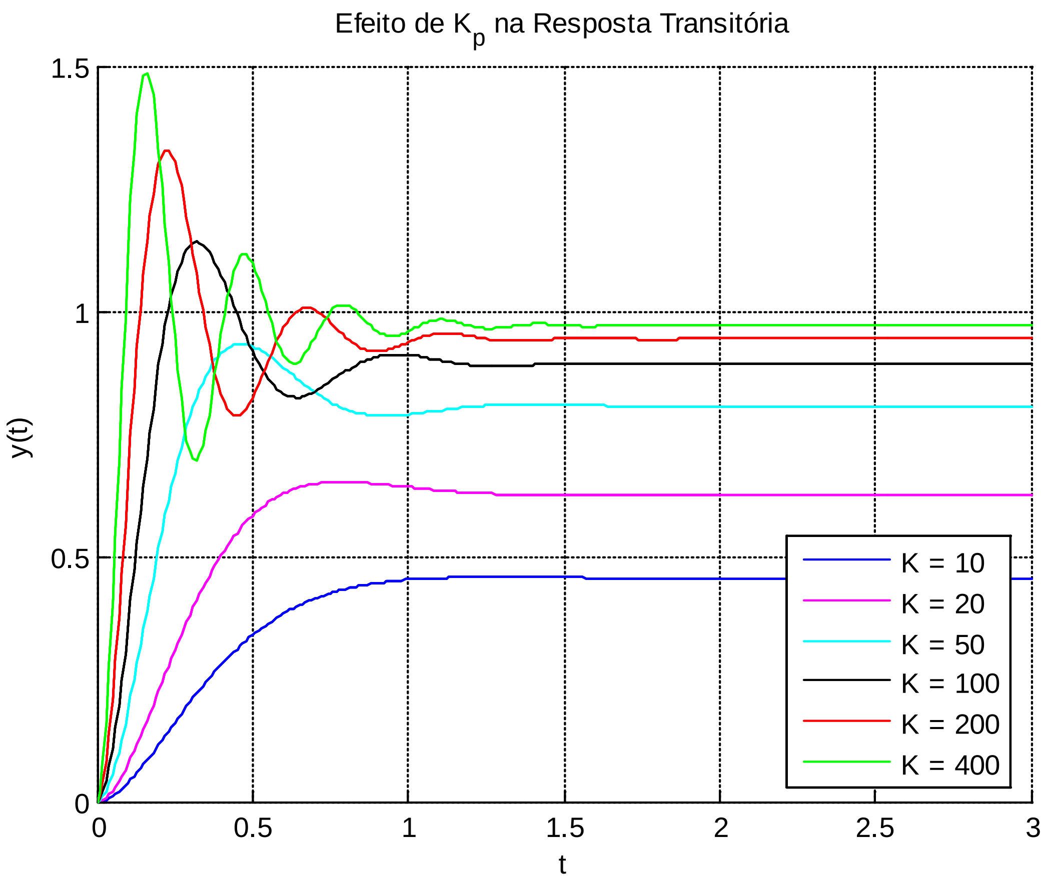
Erro em Estado Estacionário

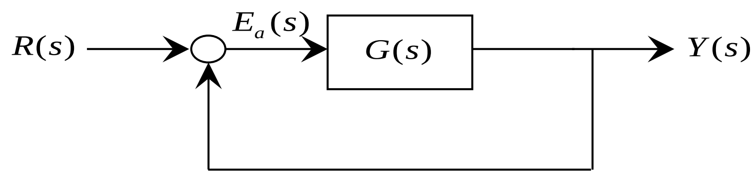
		Tipo 0		Tipo 1		Tipo 2	
Entrada	**Expressão do erro estacionário**	**Constante de erro estacionário**	**Erro**	**Constante de erro estacionário**	**Erro**	**Constante de erro estacionário**	**Erro**
Degrau, $u(t)$	$\frac{1}{1+K_p}$	$K_p =$ Constante	$\frac{1}{1+K_p}$	$K_p = \infty$	0	$K_p = \infty$	0
Rampa, $tu(t)$	$\frac{1}{K_v}$	$K_v = 0$	∞	$K_v =$ Constante	$\frac{1}{K_v}$	$K_v = \infty$	0
Parábola, $\frac{1}{2}t^2u(t)$	$\frac{1}{K_a}$	$K_a = 0$	∞	$K_a = 0$	∞	$K_a =$ Constante	$\frac{1}{K_a}$

Erro em Estado Estacionário

- Os sistemas de controle são geralmente caracterizados pelo seu tipo e pelas constantes de erro K_p, K_v e K_a. Em particular, as constantes de erro expressam numericamente a capacidade de redução do erro em estado estacionário: quanto maiores, melhor é o desempenho do sistema em estado estacionário, mas não obrigatoriamente no período transitório.

Erro em Estado Estacionário





$$G(s) = \frac{K}{(s+2)(s+6)}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + (K_p = Ganho\ DC)}$$

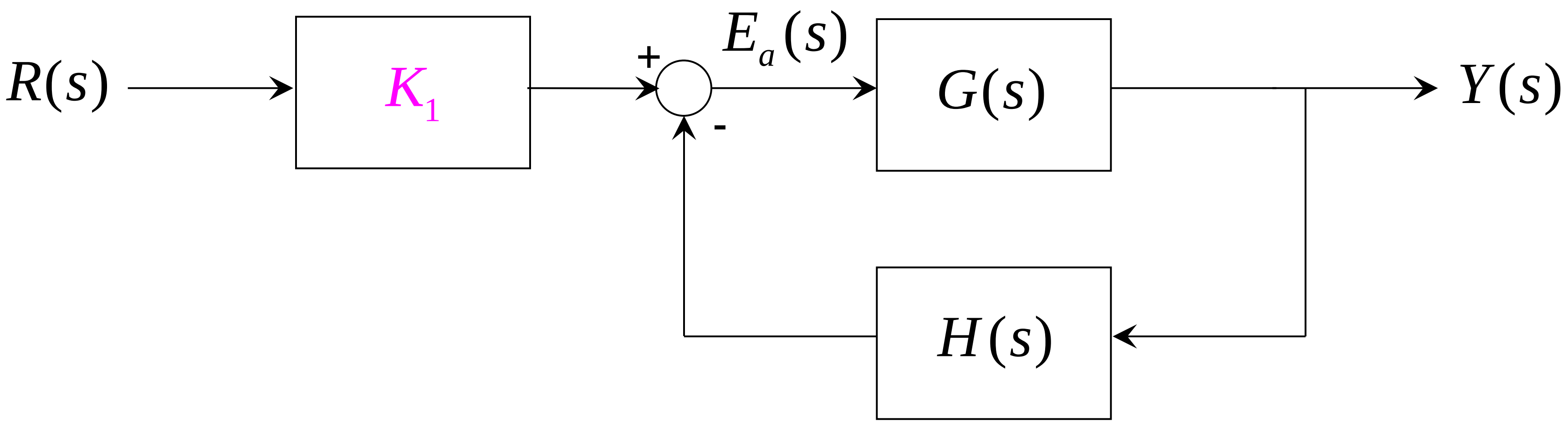
$$K_p = G(0) = K/12$$

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K/12} = \frac{12}{12 + K}$$

Script em Matlab: M_6_DesempenhoSistemasProg2.m

Erro em Estado Estacionário

- Considere, agora, o sistema a seguir:

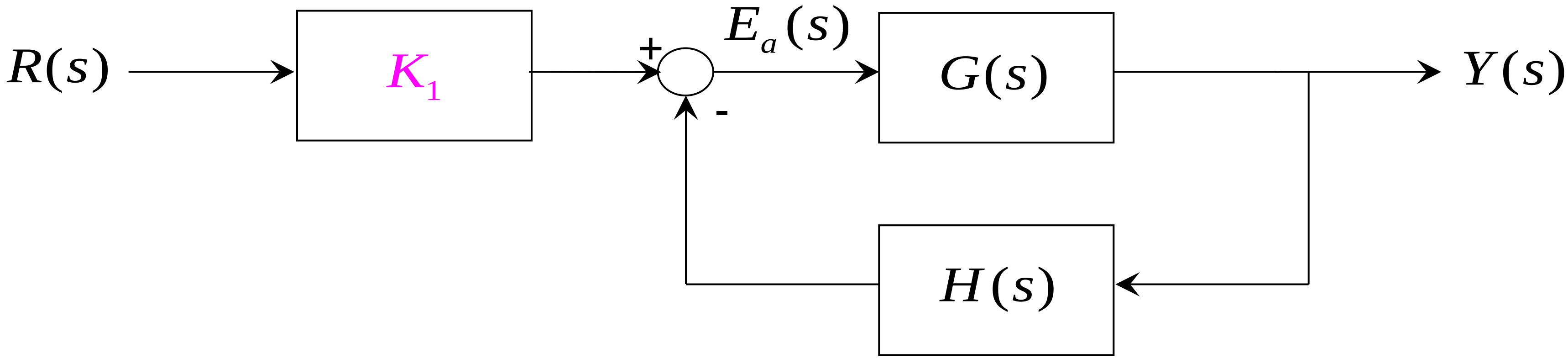


Para $H(s) \neq 1$, K_1 pode ser visto como um conversor de unidades (velocidade para tensão, por exemplo).

$$H(s) = \frac{K_2}{\tau s + 1}$$

K_2 é um fator de conversão de unidades: mV/rpm, no caso de um tacogerador, por exemplo.

Erro em Estado Estacionário



$$E(s) \triangleq R(s) - Y(s) = R(s) - \frac{K_1 G(s)}{1 + G(s)H(s)} R(s)$$

$$= \frac{1 + G(s)H(s) - K_1 G(s)}{1 + G(s)H(s)} R(s)$$

$$= \frac{1 + \left(H(s) - K_1\right)G(s)}{1 + G(s)H(s)} R(s)$$

$K_1 = K_2$

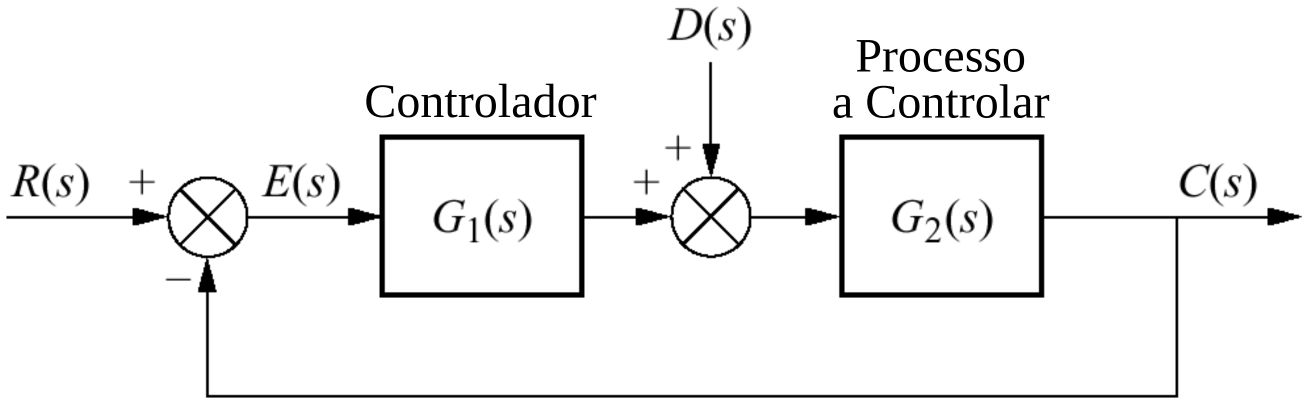
$$E(s) = \frac{1}{1 + K_1 G(s)} R(s)$$

$R(s) = 1/s$ ↓

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_1 G(0)}$$

Erro em Estado Estacionário

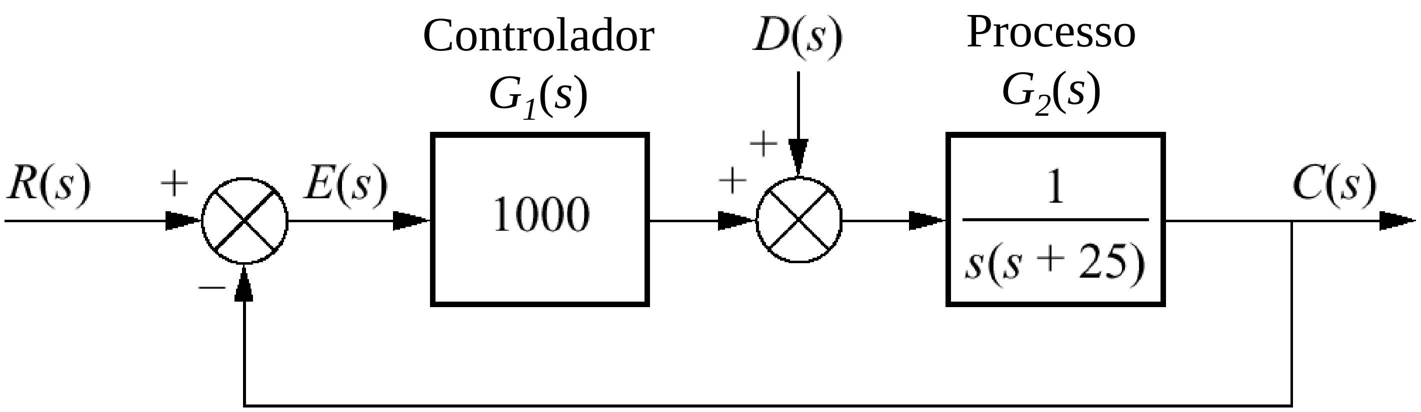
- Considere, agora, uma entrada de perturbação:



O sistema agora possui duas entradas, *R*(*s*) e *D*(*s*), e cada uma delas tem a sua contribuição para a saída *C*(*s*) e, consequentemente, para o erro em estado estacionário. Por linearidade, é possível calcular cada uma das saídas e das contribuições para o erro em estado estacionário.

Erro em Estado Estacionário

- Para o sistema a seguir, calcular a componente do erro em estado estacionário devida a uma perturbação em degrau unitário.



Solução: -1/1000

Índices de Desempenho

- Um índice de desempenho é uma medida quantitativa do desempenho de um sistema, e é escolhido de modo que seja colocada ênfase nas especificações consideradas importantes.

- Os índices de desempenho mais utilizados são: ISE, ITAE, IAE, e ITSE.

Índices de Desempenho

- ITAE – *Integral do erro absoluto vezes o tempo*: reduz a contribuição exagerada do erro nos primeiros instantes, e enfatiza erro presente na resposta em estado estacionário.

$$ITAE = \int_0^T t\left|e(t)\right|dt$$

- IAE – *Integral do erro absoluto*: $IAE = \int_0^T \left|e(t)\right|dt$

- ITSE – *Integral do erro ao quadrado vezes o tempo:*

$$ITSE = \int_0^T te^2(t)dt$$

Índices de Desempenho

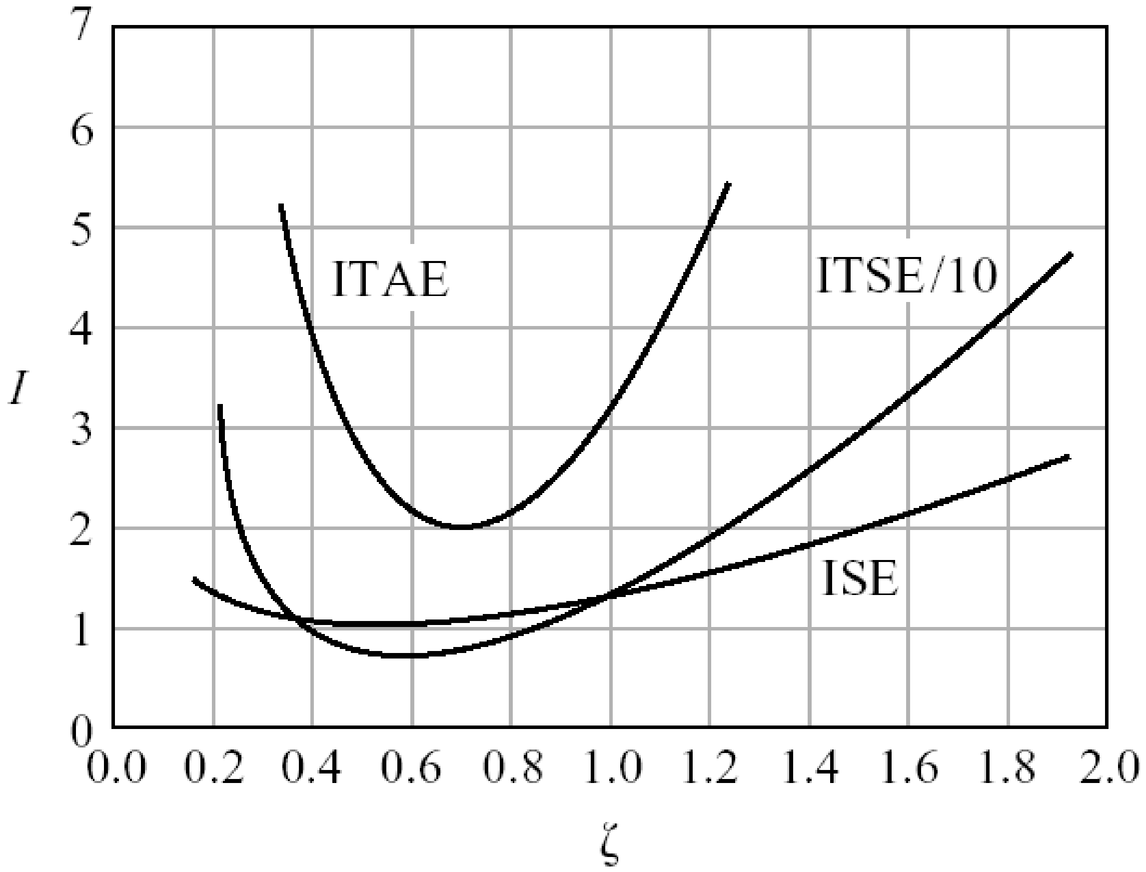
- Normalmente, o limite superior T de integração é escolhido como sendo o tempo de acomodação, ou assentamento.

- Dentre os índices vistos, o mais seletivo é o ITAE, visto que seu valor mínimo é facilmente identificável em função da variação do coeficiente de amortecimento, ζ.

- Um sistema de controle é dito ser ótimo quando o índice de desempenho selecionado é minimizado.

Índices de Desempenho

Índices para sistema de 2ª ordem, com entrada em degrau unitário



Índices de Desempenho

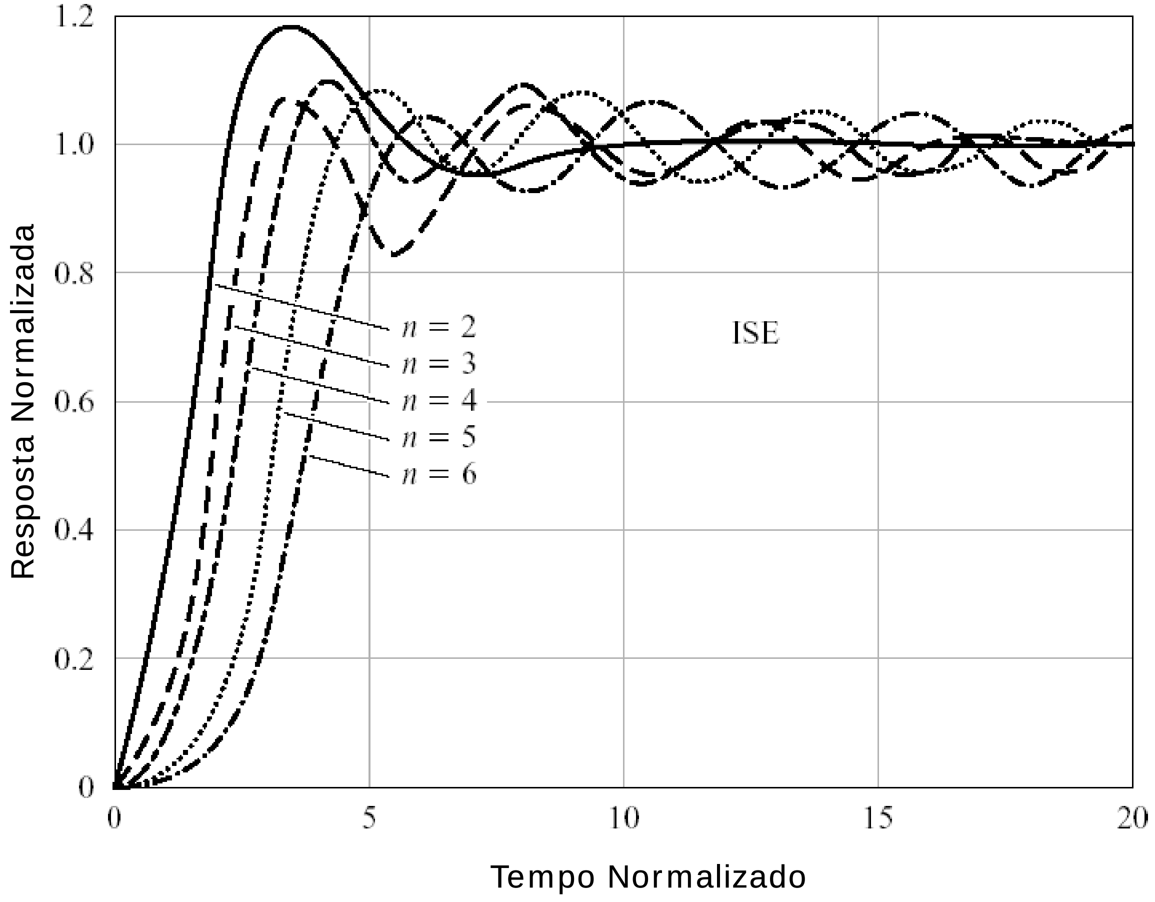
- Para a função: $T(s)=\dfrac{b_0}{s^n+b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_1s+b_0}$

Considerando entrada em degrau unitário:

Coeficientes Ótimos de T(s) para Índice ITAE
$s+\omega_n$
$s^2+1,4\omega_n s+\omega^2_n$
$s^3+1,75\omega_n s^2+2,15\omega^2_n s+\omega^3_n$
$s^4+2,1\omega_n s^3\ 3,4\omega^2_n s^2+2,7\omega^3_n s+\omega^4_n$
$s^5+2,8\omega_n s^4+5\omega^2_n s^3+5,5\omega^3_n s^2+3,4\omega^4_n s+\omega^5_n$
$s^6+3,25\omega_n s^5+6,6\omega^2_n s^4+8,6\omega^3_n s^3+7,45\omega^4_n s^2+3,95\omega^5_n s+\omega^6$

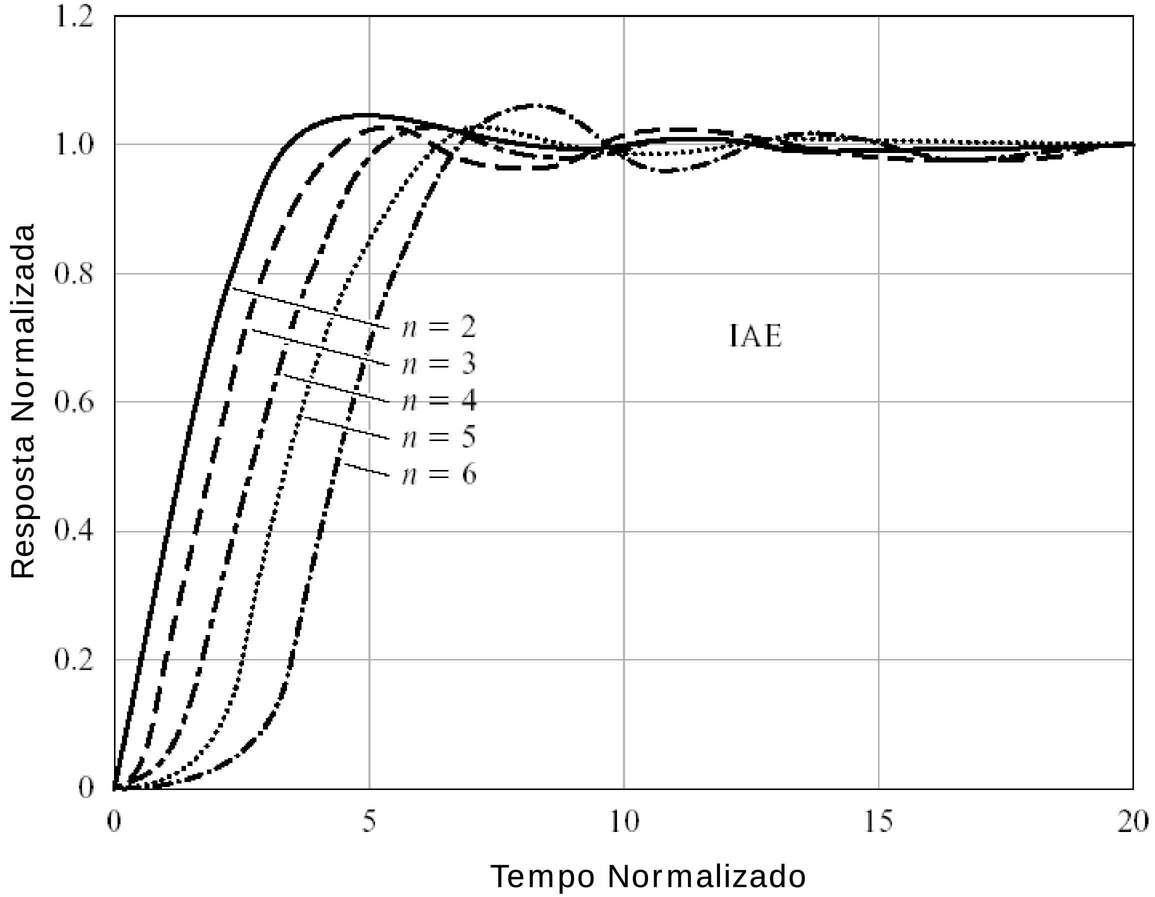
Índices de Desempenho

Respostas ao Degrau para Valores Ótimos do ISE



Índices de Desempenho

Respostas ao Degrau para Valores Ótimos do IAE



Índices de Desempenho

Respostas ao Degrau para Valores Ótimos do ITAE