Controle de Sistemas

Desempenho de Sistemas de Controle

Renato Dourado Maia

Universidade Estadual de Montes Claros

Engenharia de Sistemas

Unimontes

Análise da Resposta Temporal

- A resposta temporal de um sistema de controle pode ser dividida em duas partes:
  - A resposta transitória: $y_t(t)$
  - A resposta de regime permanente ou estado estacionário *(steady-state)*: $y(\infty)$

$$y(t) = y_t(t) + y(\infty)$$

Análise da Resposta Temporal

- A resposta transitória é definida como a parte da resposta que tende a zero quando o tempo tende a infinito:

$$\lim_{t \to \infty} y_t(t) = 0$$

- A resposta de estado estacionário é a parte da resposta que permanece quando a resposta transitória se iguala a zero, podendo ser constante ou um sinal que varia no tempo com padrão constante, como um sinal senoidal de amplitude, frequência e fase constante, ou um sinal tipo rampa com inclinação constante.

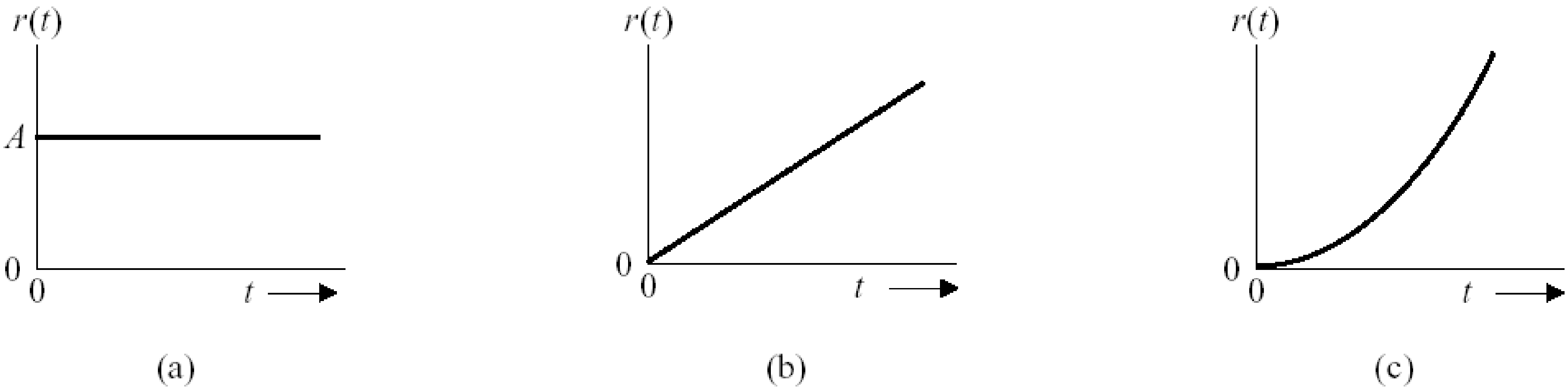
Especificações de Desempenho

- Podem incluir vários índices de resposta temporal para uma entrada de comando específica, bem como uma precisão em regime permanente esperada.
- Geralmente as especificações são concorrentes.

O que fazer?

Buscar um compromisso entre as características desejadas e as que são obtidas após ajustes sucessivos...

Sinais de Teste



(a) Degrau. (b) Rampa. (c) Parábola.

Sistemas de Primeira Ordem

- Consideremos um sistema de primeira ordem:

$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k}{s+a}$$

- Para uma entrada do tipo impulso unitário, a saída do sistema é:

$$Y(s) = G_1(s)R(s) = \frac{k}{s+a}1 \Rightarrow y(t) = ke^{-at}$$

$$Seja\ p = -a\ o\ polo\ da\ função \begin{cases} p < 0 \rightarrow \lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0 \\ p = 0 \rightarrow k \\ p > 0 \rightarrow \lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \infty \end{cases}$$

Sistemas de Primeira Ordem

- Para uma entrada do tipo degrau unitário, a saída do sistema é:

$$Y(s) = G_1(s)R(s) = \frac{k}{s(s+a)} = \frac{k/a}{s} - \frac{k/a}{(s+a)} \Rightarrow y(t) = \frac{k}{a}(1-e^{-at})$$

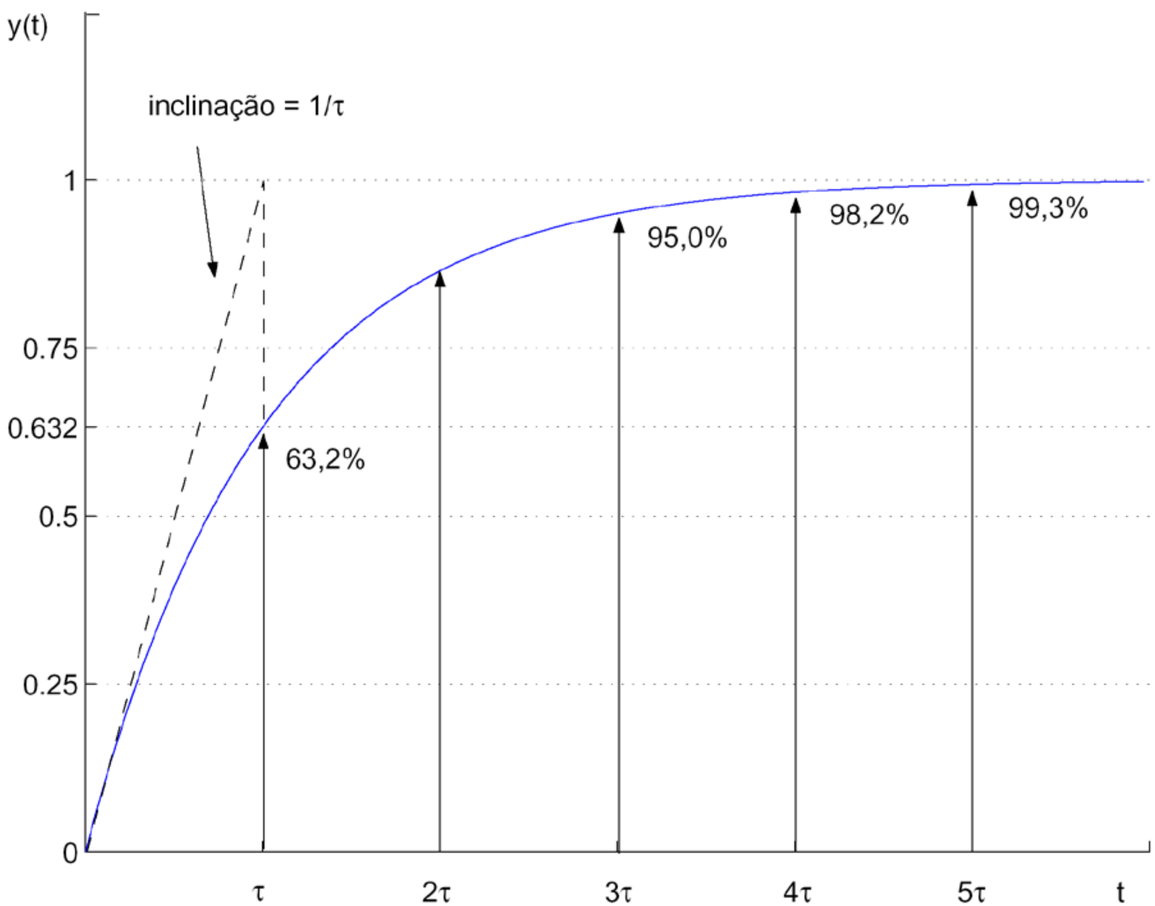
$$\downarrow \quad p = -a < 0$$

$$\tau = 1/a = constante\ de\ tempo$$

$$\downarrow$$

Tempo para se chegar a 63,2% do valor final...

Sistemas de Primeira Ordem



Sistemas de Segunda Ordem

- Consideremos um sistema de segunda ordem:

$$G_2(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s}$$

- Considerando-se realimentação unitária negativa:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} R(s)$$

Qual é a resposta para uma entrada em degrau unitário?

Sistemas de Segunda Ordem

- A resposta temporal para uma entrada em degrau unitário é:

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\beta}(\beta cos\,\omega_n\beta t + \zeta\, sen\,\omega_n\beta t)$$

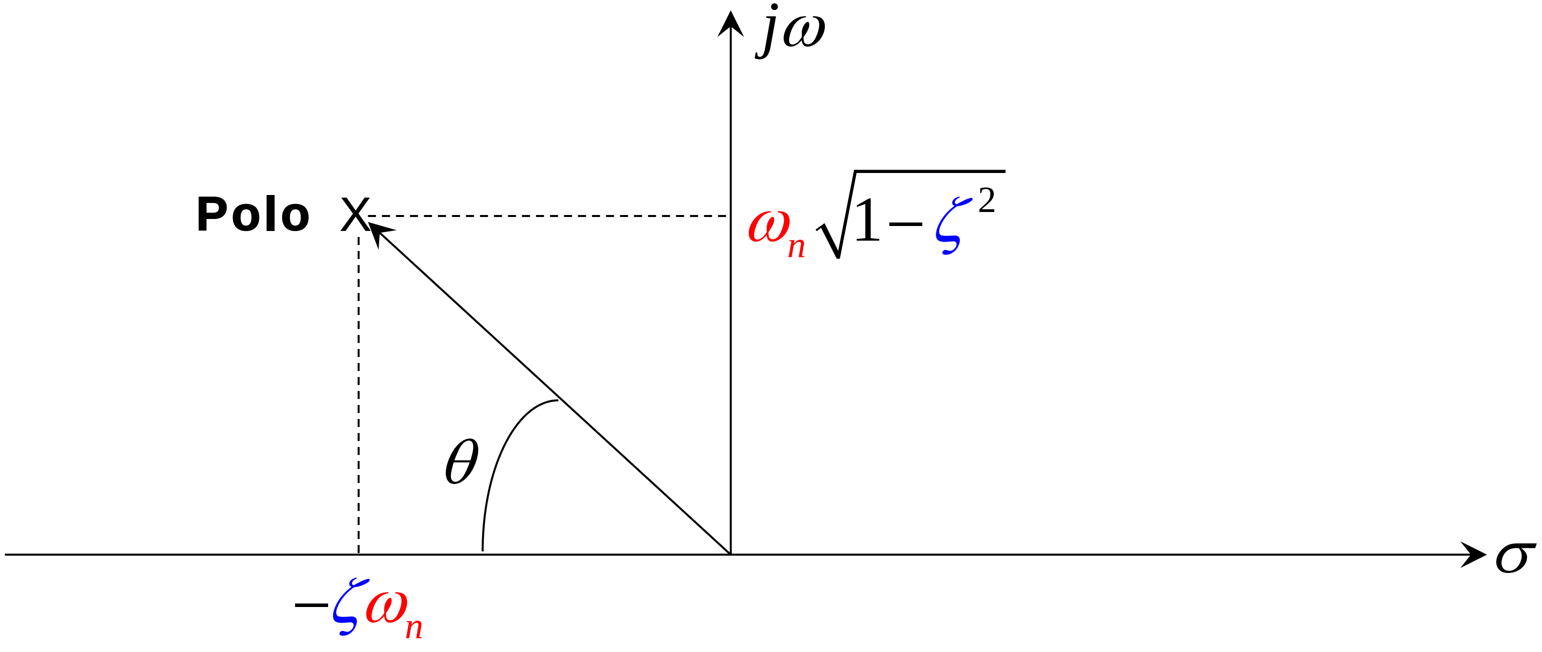
$$= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\beta} sen(\omega_n\beta t + \theta)$$

$$\theta = cos^{-1}\zeta,\ \beta = \sqrt{1-\zeta^2},\ 0 < \zeta < 1$$

Coeficiente/Fator/Relação de Amortecimento

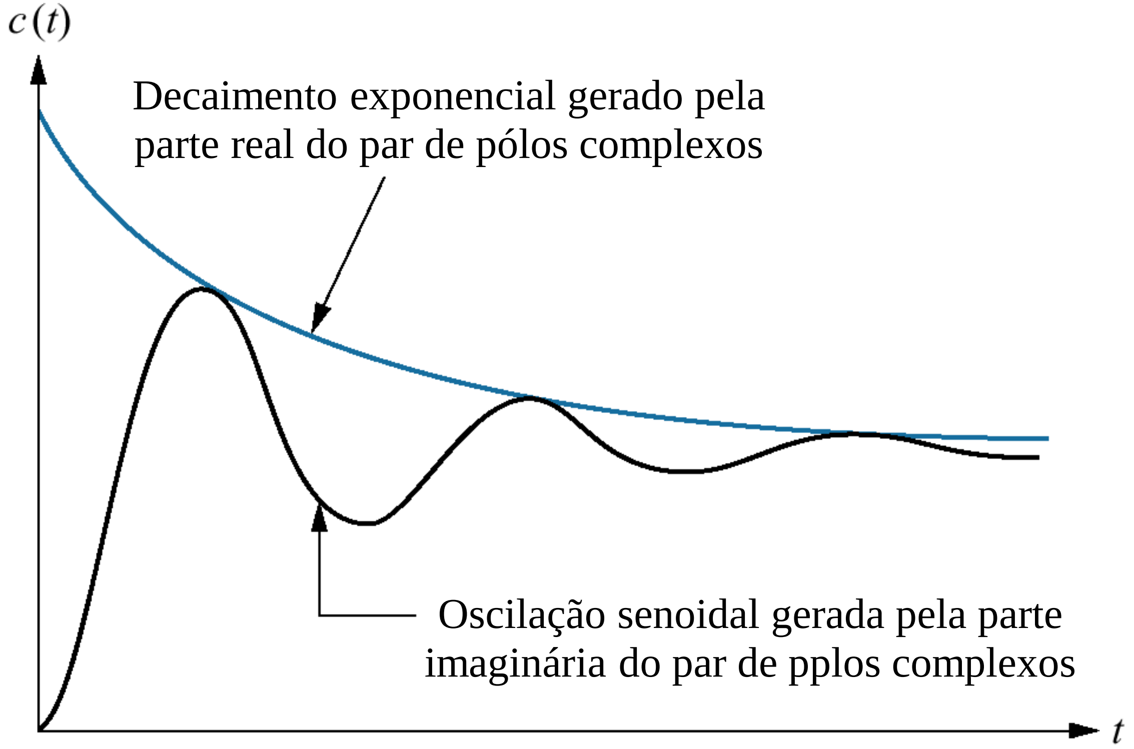
Sistemas de Segunda Ordem

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \xrightarrow{\text{Pólos}} p_1, p_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$



Sistemas de Segunda Ordem

Componentes da Resposta ao Degrau Gerados por Polos Complexos



Sistemas de Segunda Ordem

- Um sistema de segunda ordem pode ser classificado de acordo com o valor de seu coeficiente de a-mortecimento:

$$\zeta = 0 \rightarrow p_1, p_2 = j\omega_n \Rightarrow \textit{não}-\textit{amortecido}$$

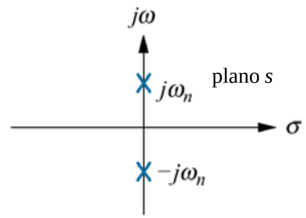
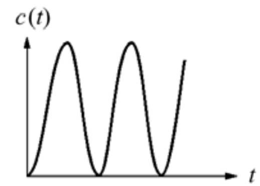
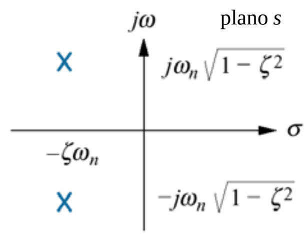
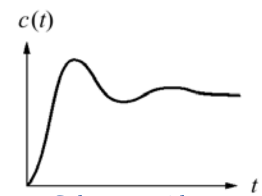
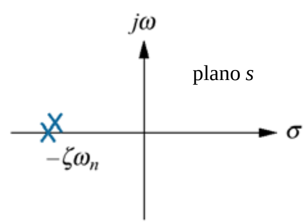
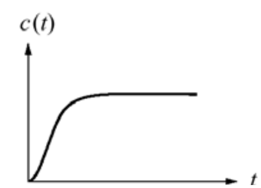
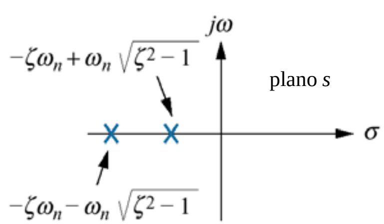
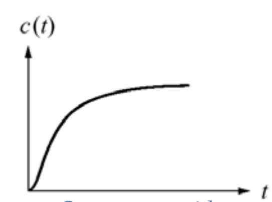
$$0 < \zeta < 1 \rightarrow p_1, p_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \Rightarrow \textit{subamortecido}$$

$$\zeta = 1 \rightarrow p_1, p_2 = -\omega_n \Rightarrow \textit{criticamente amortecido}$$

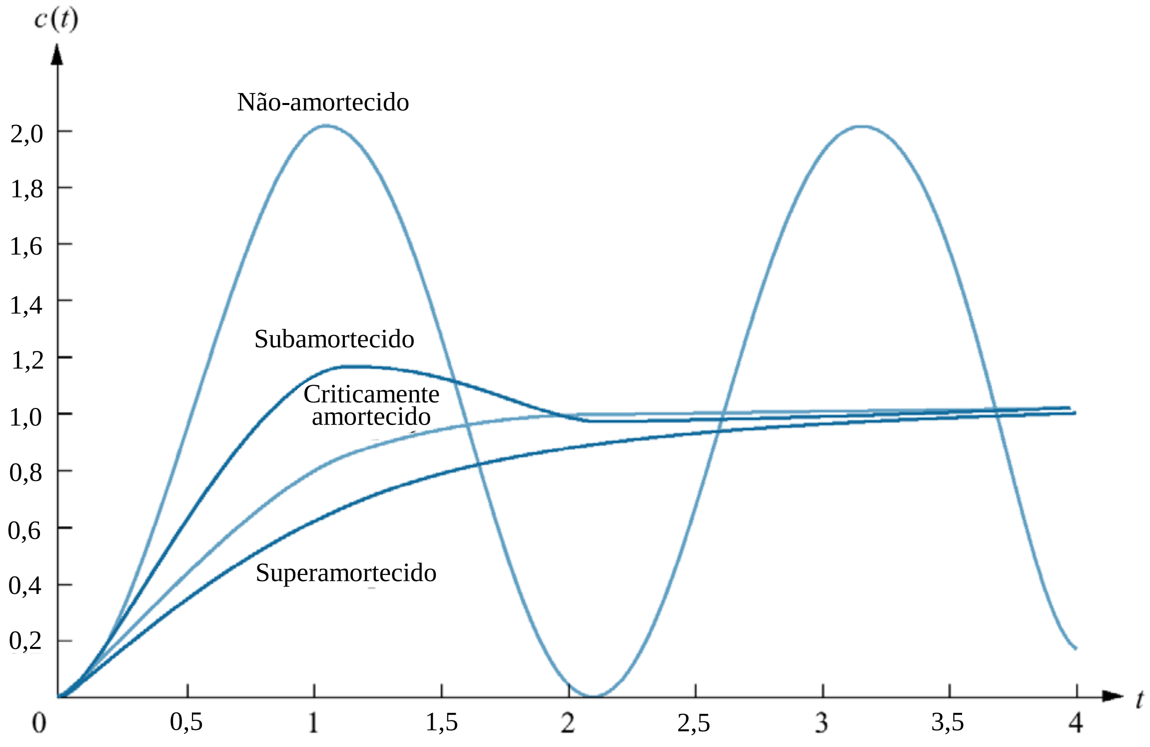
$$\zeta > 1 \rightarrow p_1, p_2 = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \Rightarrow \textit{sobreamortecido}$$

$$\zeta < 0 \rightarrow p_1, p_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \Rightarrow \textit{instável}$$

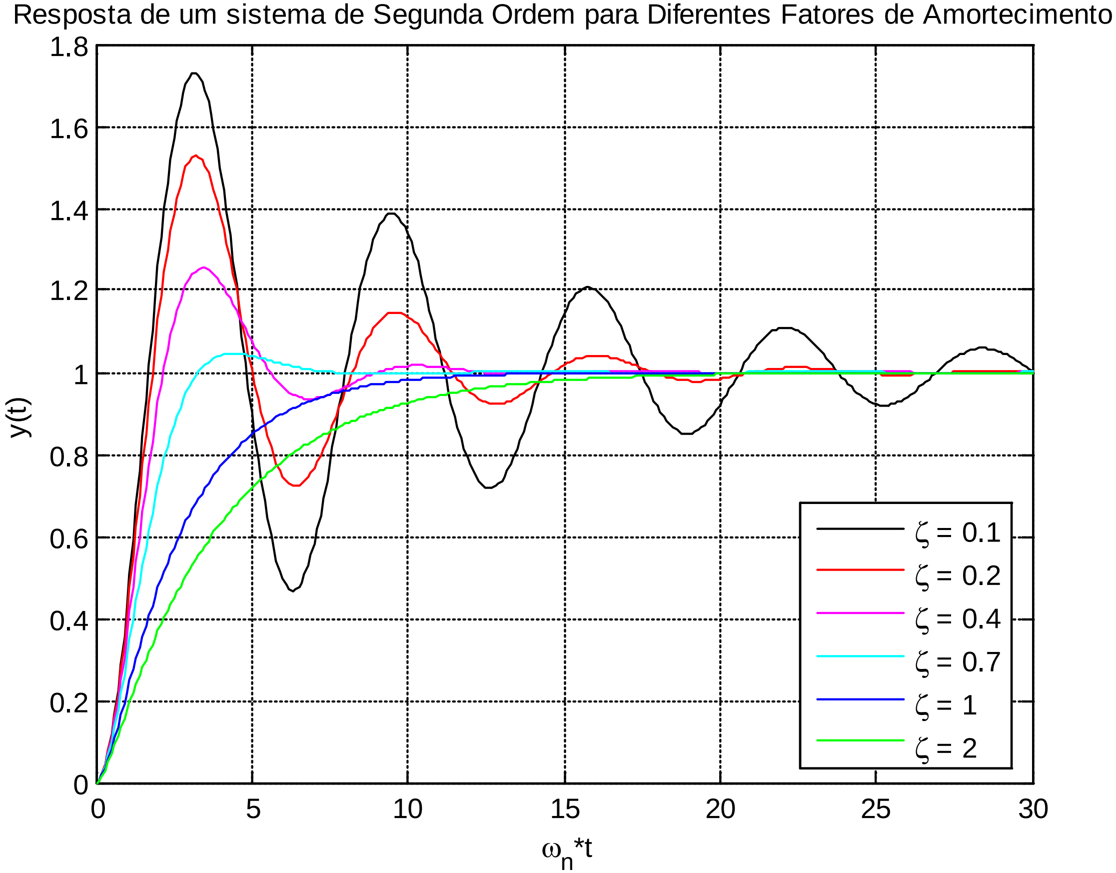
Sistemas de Segunda Ordem

ζ	Pólos	Resposta ao degrau
0		 Não-amortecido
$0 < \zeta < 1$		 Subamortecido
$\zeta = 1$		 Criticamente amortecido
$\zeta > 1$		 Superamortecido

Sistemas de Segunda Ordem

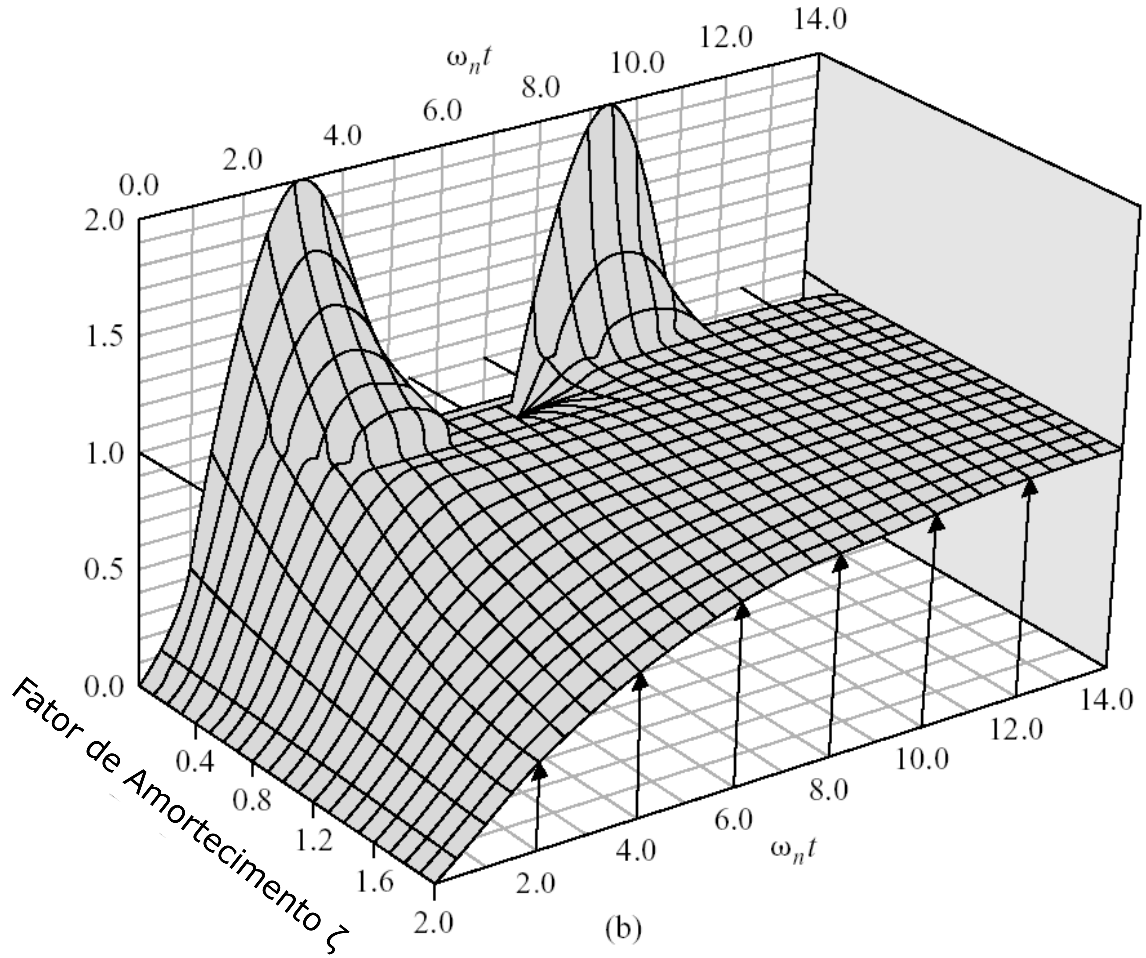


Sistemas de Segunda Ordem



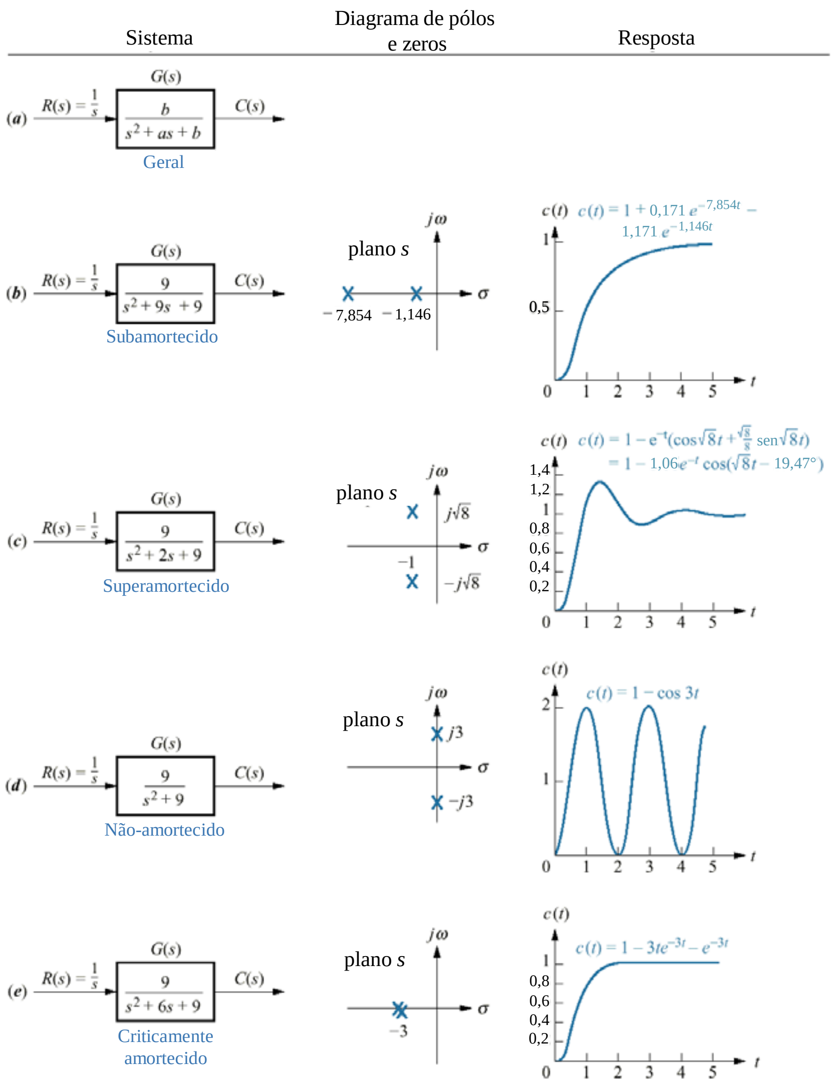
Script em Matlab: M_5_DesempenhoSistemasProg1.m

Sistemas de Segunda Ordem



(b)

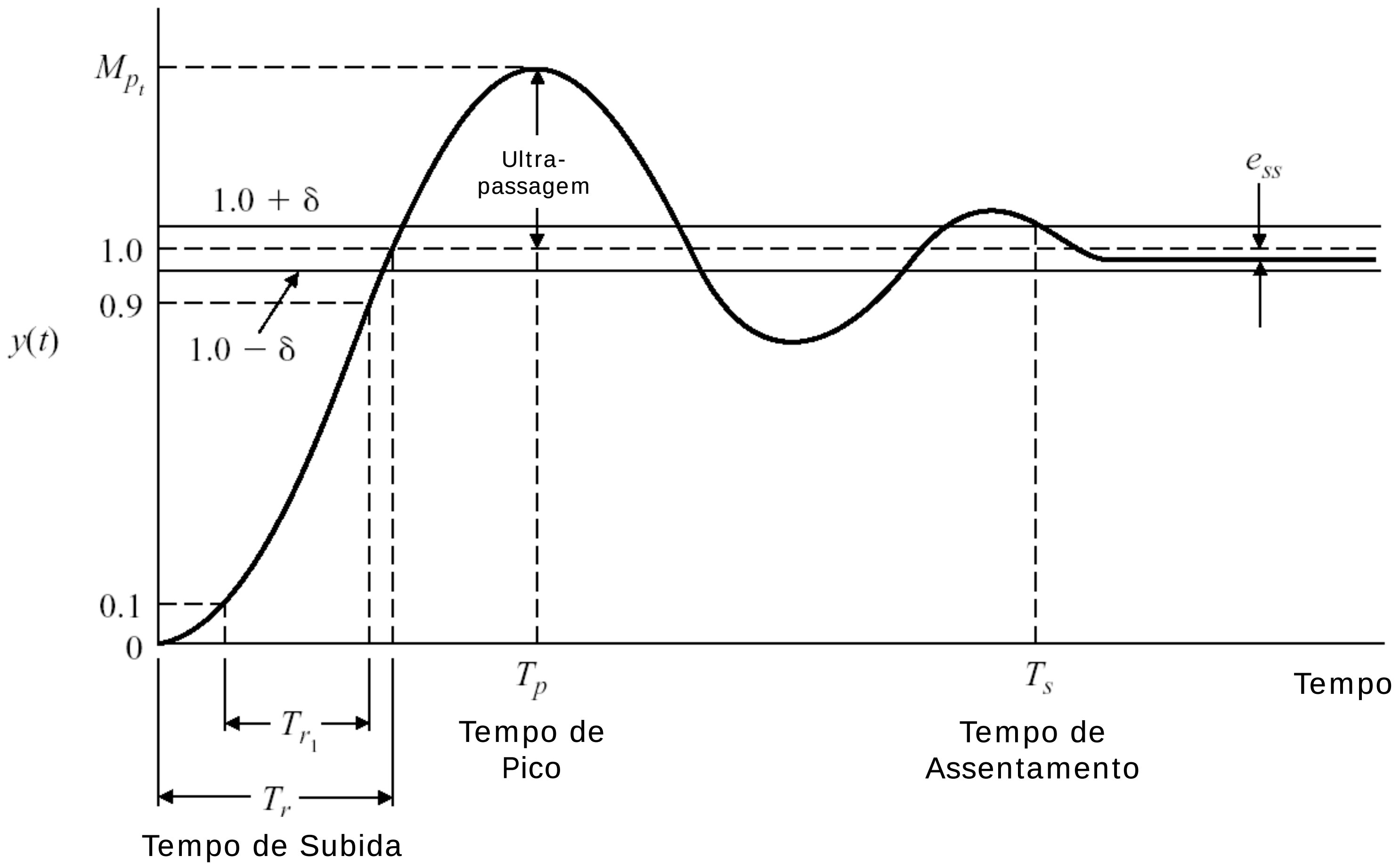
Sistemas de Segunda Ordem



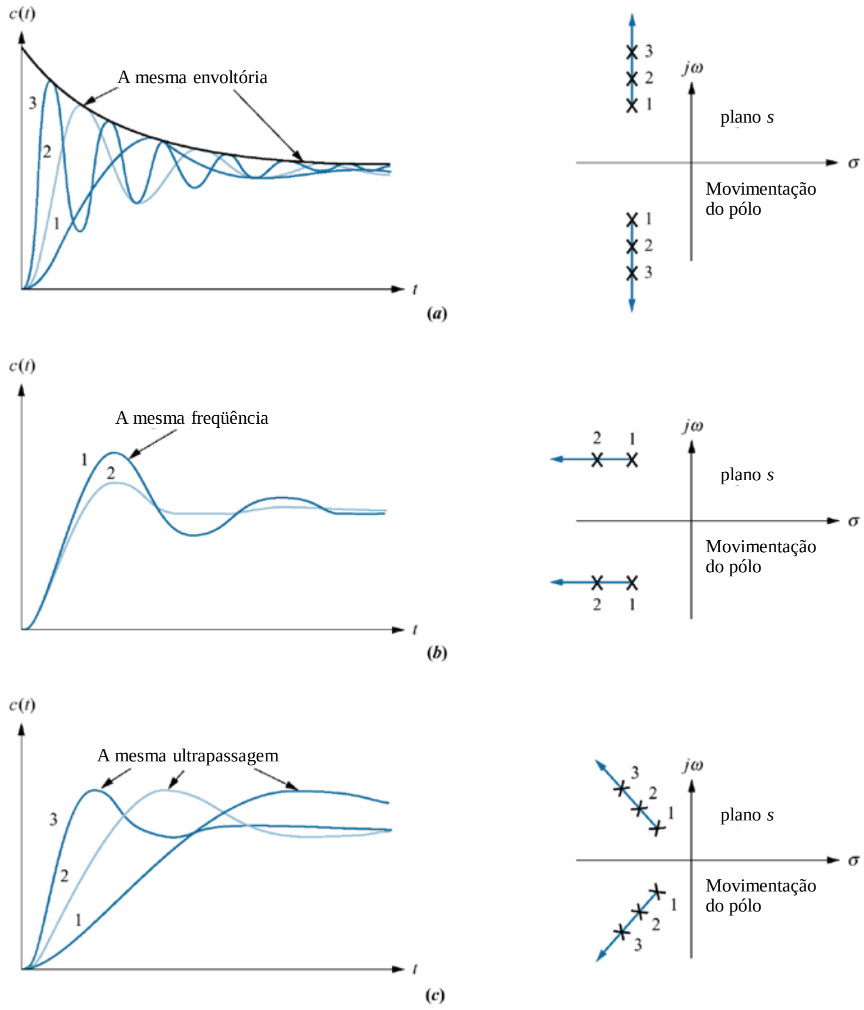
Sistemas de Segunda Ordem

- Especificações de resposta transitória, considerando entrada em degrau:
  1. Tempo de Subida: T_r, T_{r_1}
  2. Tempo de Acomodação ou Assentamento: T_s
  3. Ultrapassagem Percentual: $U.P.$
  4. Tempo do Primeiro Pico: T_p

Sistemas de Segunda Ordem



Sistemas de Segunda Ordem



Sistemas de Segunda Ordem

- Fixando uma tolerância de 2%, por exemplo, para o tempo de acomodação, como calculá-lo?

Pensando apenas na exponencial que "envolve" a resposta:

$$e^{-\zeta\omega_n T_s} < 0,02$$

Aplicando o nosso conhecimento de Cálculo 0...

$$T_s = 4\tau = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

Sistemas de Segunda Ordem

- O valor máximo e o tempo do primeiro pico representam um ponto de máximo... Como achar uma expressão para calculá-los?

Aplicando o nosso conhecimento de Cálculo 1...

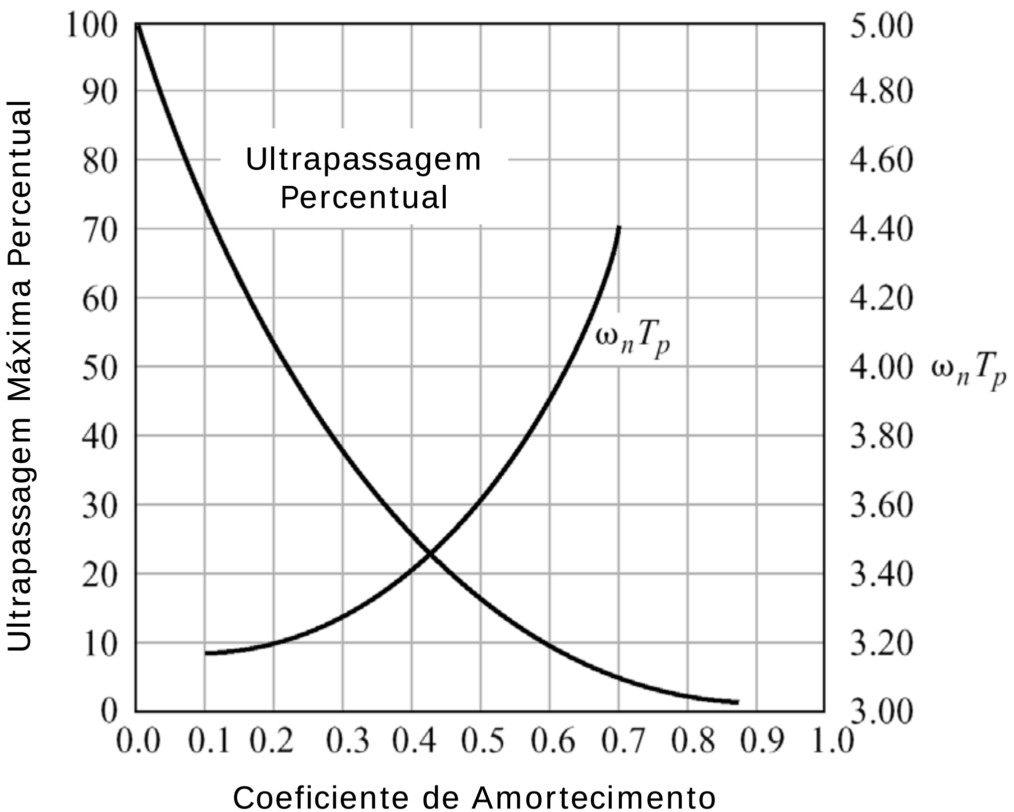
$$\frac{dy(t)}{dt} = 0 \Rightarrow T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$M_{p_t} = 1 + e^{-\zeta\pi / \sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$U.P = 100 e^{-\zeta\pi / \sqrt{1-\zeta^2}}$$

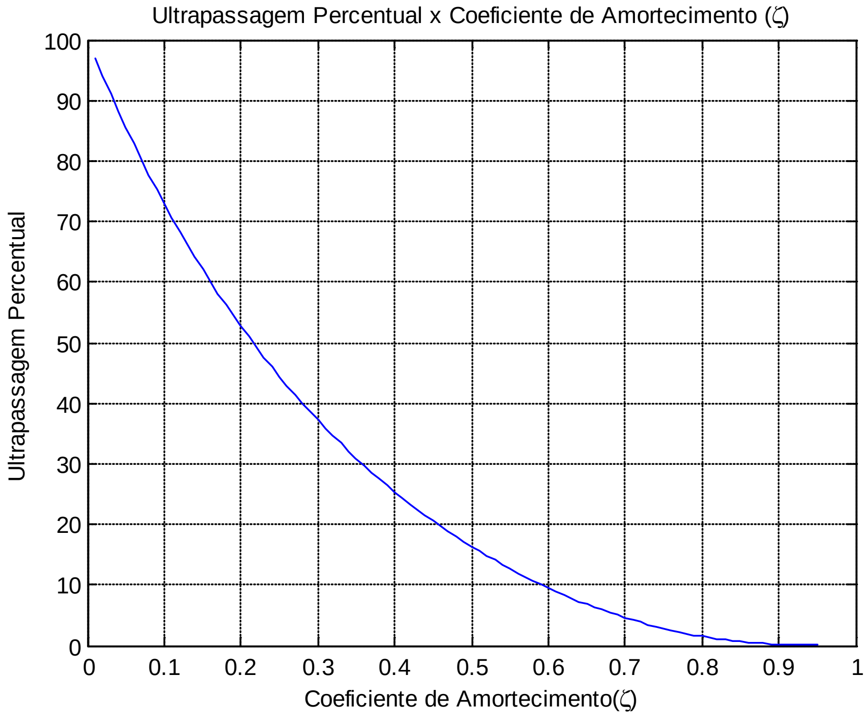
Sistemas de Segunda Ordem

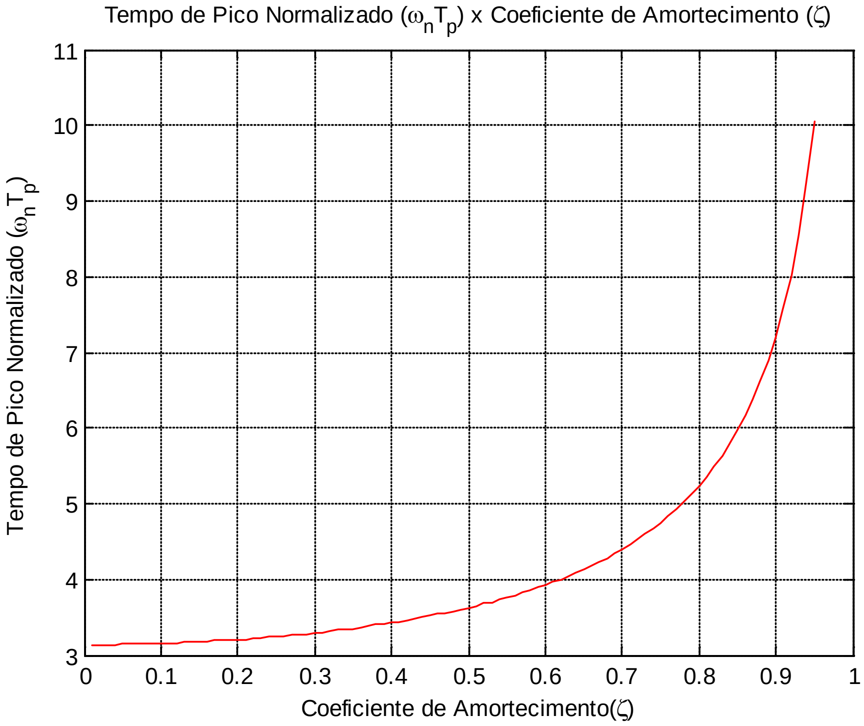
Ultrapassagem Percentual e Tempo de Pico Normalizado × Relação de Amortecimento



Sistemas de Segunda Ordem

Ultrapassagem Percentual e Tempo de Pico Normalizado × Relação de Amortecimento

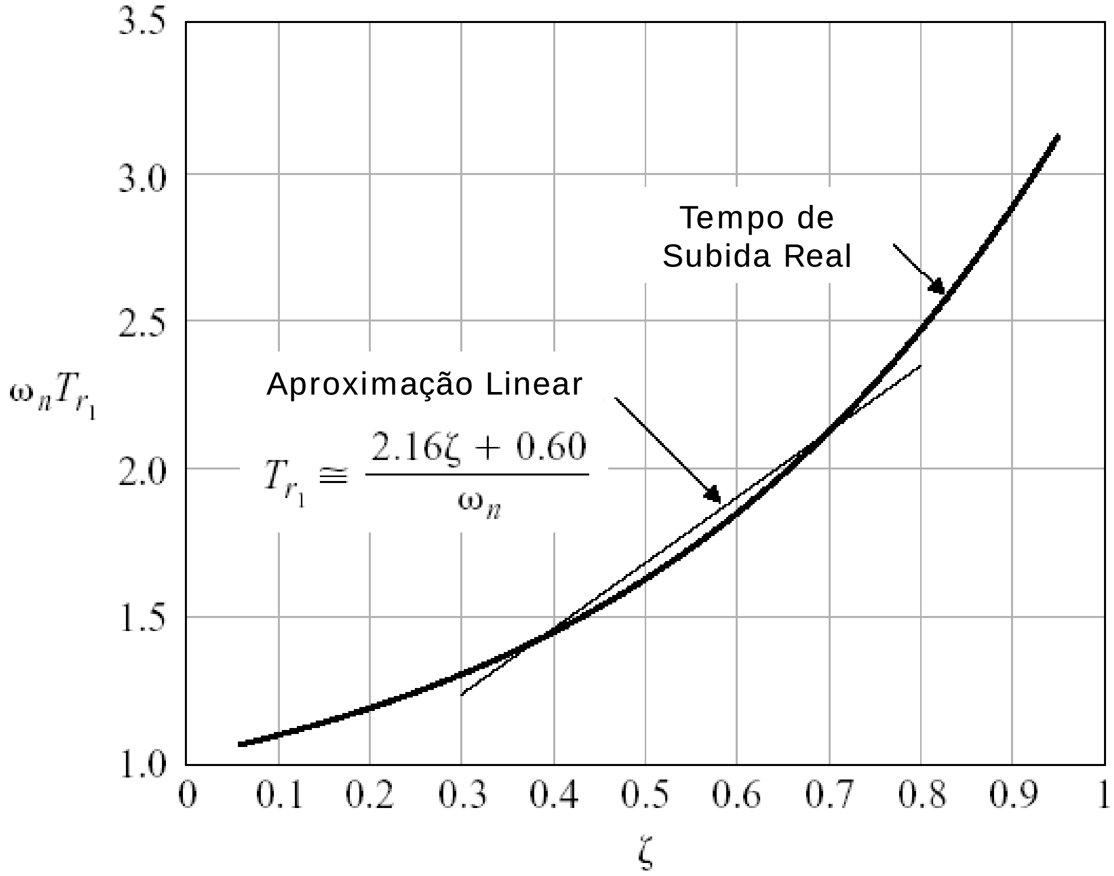




Script em Matlab: M_5_DesempenhoSistemasProg2.m

Sistemas de Segunda Ordem

Tempo de Subida Normalizado versus Relação de Amortecimento



Sistemas de Segunda Ordem

- Efeito de um terceiro polo na resposta de um sistema de segunda ordem:

  - A análise de sistemas de segunda é importante porque muitos sistemas têm um par de polos dominantes.
  - Quando um sistema possui dois polos complexos (oscilações subamortecidas) e um polo real (resposta exponencial), a resposta total será uma combinação das duas, predominando aquela que for mais lenta (pplos mais próximos da origem).

Sistemas de Segunda Ordem

- Seja o seguinte sistema de terceira ordem:

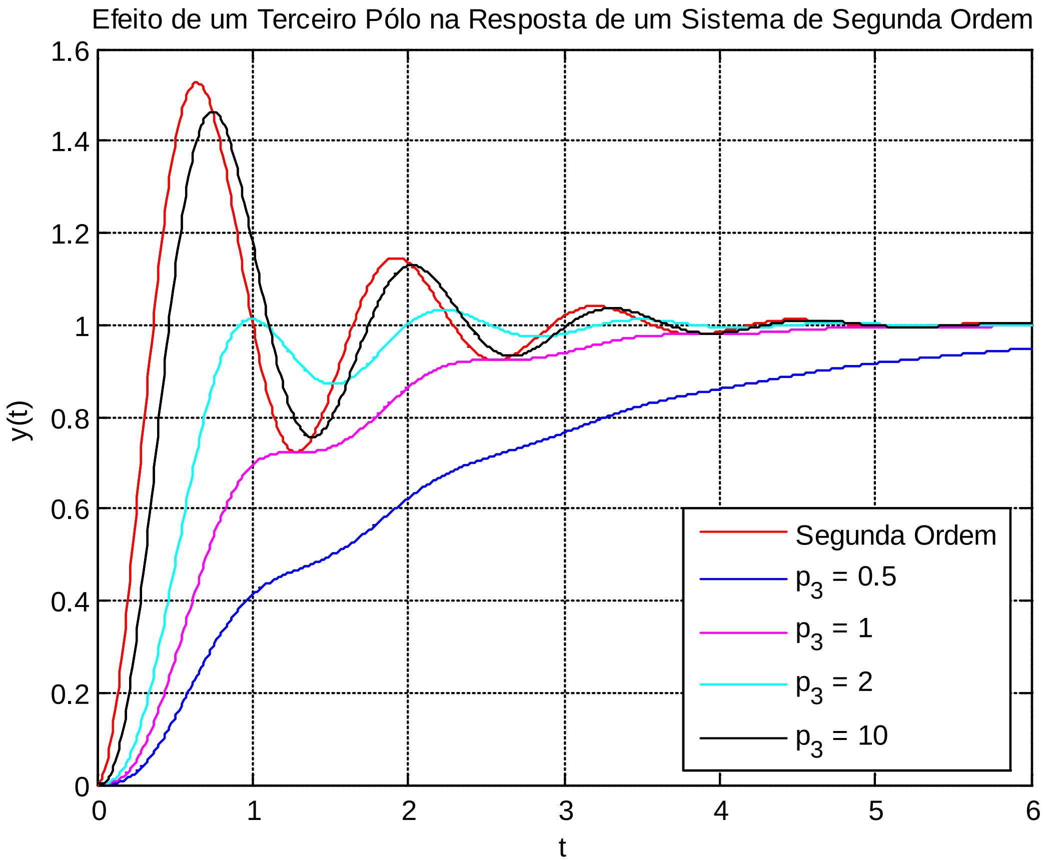
$$T(s) = \frac{1}{(s^2 + 2\zeta s + 1)(\gamma s + 1)}, \quad \omega_n = 1$$

- É possível analisá-lo como um sistema de segunda ordem?
  - Sim, desde que a seguinte condição, que é verificada experimentalmente, seja satisfeita:

$$|1/\gamma| \geq 10|\zeta\omega_n|$$

Dominância de polos!!!

Sistemas de Segunda Ordem



$$G(s) = \frac{5^2}{((1/p_3)\,s+1)(s^2+2s+5^2)}$$

$$\zeta\omega_n = 1$$

$$|1/\gamma| \geq 10|\zeta\omega_n|$$

$$p_3 \geq 10$$

$$\Downarrow$$

aproximação válida!!!

Script em Matlab: M_5_DesempenhoSistemasProg3.m