Métodos de Resposta em Frequência – Parte 2

Controle de Sistemas
Renato Dourado Maia
(Unimontes)

Sistemas de Fase Mínima e Não Mínima

- Um sistema pode ter zeros no semiplano direito e ser também estável. Funções de transferência com zeros no semiplano direito são classificadas como de fase não mínima.

- Se os zeros de uma função de transferência são todos refletidos para o semiplano oposto, de forma simétrica em relação ao eixo imaginário, não haverá mudança no módulo da função de transferência original, havendo apenas mudança na fase.

Sistemas de Fase Mínima e Não Mínima

Quando se compara a variação de fase dos dois sistemas, observa-se que a variação de fase de um sistema com todos os zeros no semiplano esquerdo é sempre menor, com w variando de zero a infinito. Portanto, a função de transferência com todos os seus zeros no semiplano esquerdo é dita de fase mínima.

Sistemas de Fase Mínima e Não Mínima

- A função de transferência $G_2(s)$, com $|G_2(s)| = |G_1(s)|$ e todos os zeros de $G_1(s)$ refletidos, simetricamente ao eixo imaginário, no semiplano direito, é chamada de função de transferência de fase não mínima.

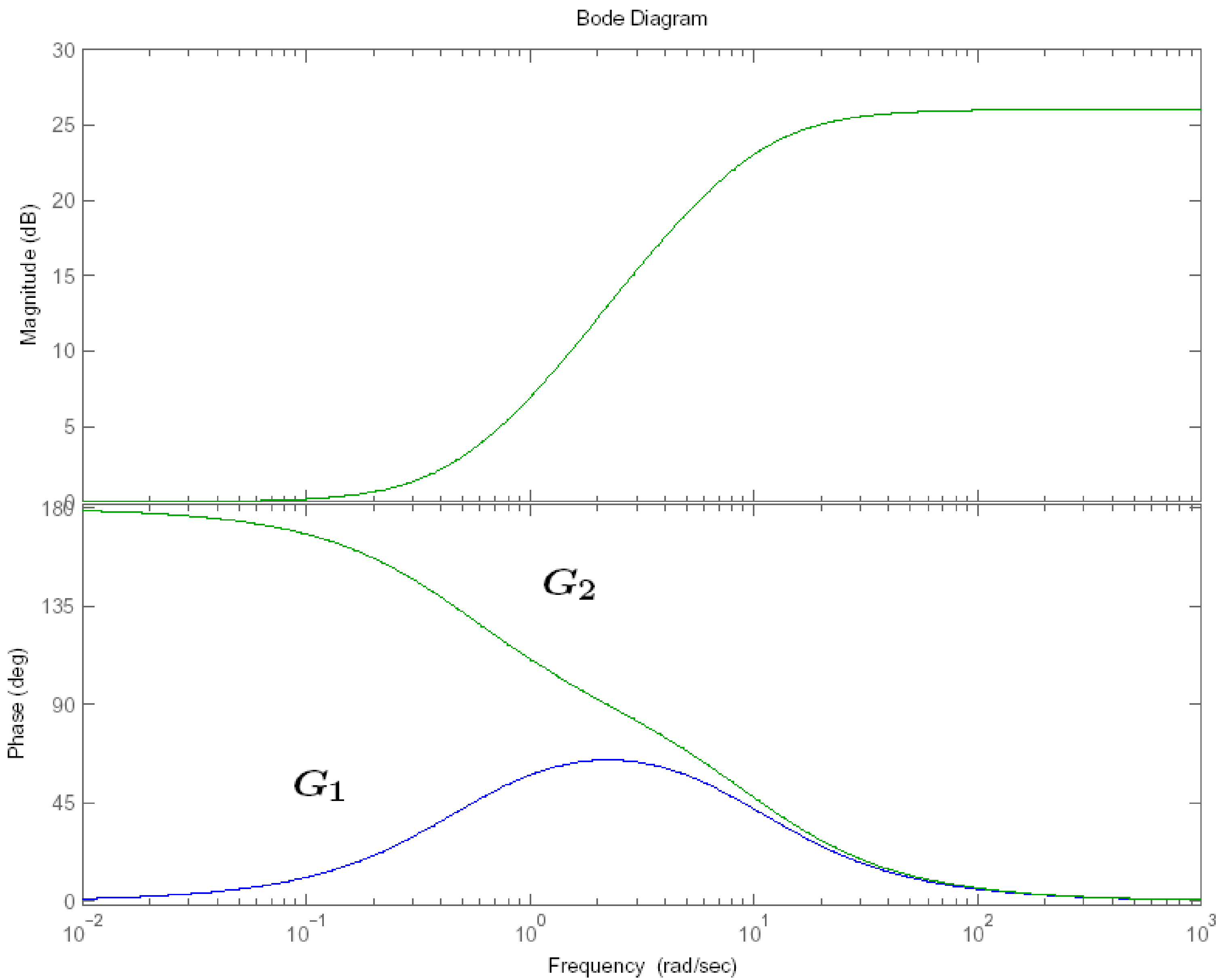
Uma função de transferência e dita de fase mínima se todos os seus zeros estão no semiplano esquerdo do plano s. Ela é chamada de função de transferência de fase não mínima se tiver zeros no semiplano direito.

Sistemas de Fase Mínima e Não-Mínima

- O significado do termo fase mínima deve ser entendido como sendo a menor variação possível de fase para uma dada curva de módulo... Vejamos um exemplo:

$$G_1(j\omega) = \frac{1 + j\omega T}{1 + j\omega T_1}, \quad G_2(j\omega) = \frac{-1 + j\omega T}{1 + j\omega T_1}, \quad 0 < T_1 < T$$

As duas funções de transferência têm o mesmo comportamento para o módulo, conforme a frequência varia. Todavia, o comportamento de fase é diferente...



Bode Diagram
Magnitude (dB)
30
25
20
15
10
5
0
Phase (deg)
180
135
90
45
0
G_2
G_1
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
Frequency (rad/sec)

Sistemas de Fase Mínima e Não Mínima

- Um exemplo interessante de fase não mínima é o tempo morto, retardo no tempo, ou atraso de transporte, caracterizado por:

$$G(s) = e^{-sT}$$

O módulo é sempre 1:

$$\left|G(j\omega)\right| = \left|\cos\omega T - j\,\mathrm{sen}\,\omega T\right| = 1$$ ➔ 0 dB

E a fase?

$$\angle G(j\omega) = -\omega T$$ ➔ Tempo morto = decréscimo na fase...

Traçado do Diagrama de Bode

- Lembrando: o diagrama de Bode de uma função de transferência, G(s), composta de vários polos e zeros, é obtido adicionando-se a curva de cada polo e zero individualmente. Consideremos a seguinte função de transferência:

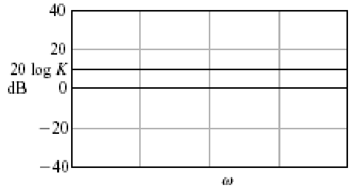
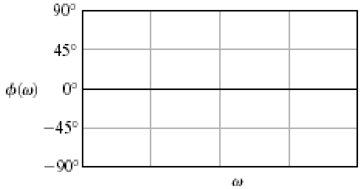
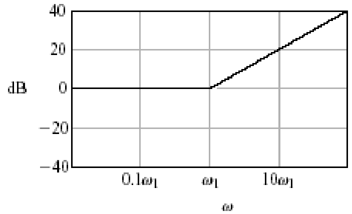
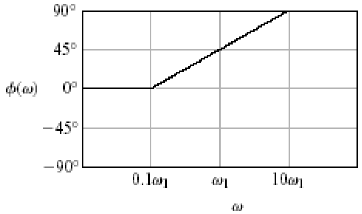
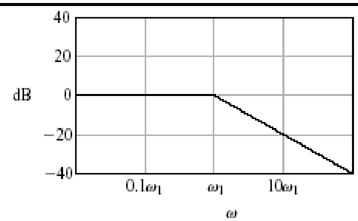
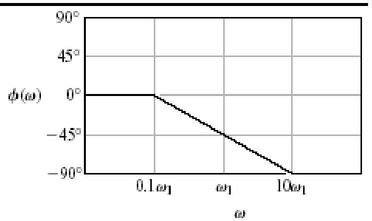
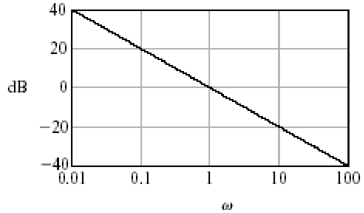
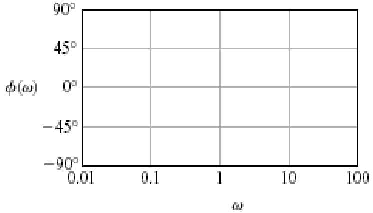
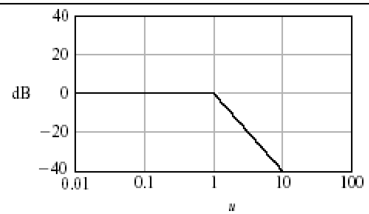
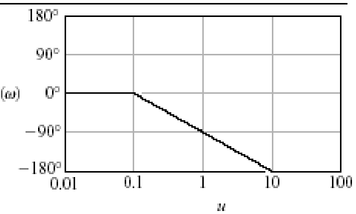
$$G(j\omega) = \frac{5(1 + j0.1\omega)}{j\omega(1 + j0.5\omega)[1 + j0.6(\omega/50) + (j\omega/50)^2]}$$

Quais são os fatores que aparecem na FT, conforme a frequência aumenta?

Traçado do Diagrama de Bode

1. Ganho constante $K = 5$: $20\log 5 = 14$ dB.
2. Um pólo na origem.
3. Um pólo em $w = 2$ rad/s.
4. Um zero em $w = 10$ rad/s.
5. Um par de pólos complexos em $w = w_n = 50$ rad/s.

Curvas Assintóticas para os Termos Básicos de uma Função de Transferência

Term	Magnitude 20 log |G|	Phase, $\phi(\omega)$
1. Gain, $G(j\omega) = K$		
2. Zero, $G(j\omega) = (1 + j\omega/\omega_1)$		
3. Pole, $G(j\omega) = (1 + j\omega/\omega_1)^{-1}$		
4. Pole at the origin, $G(j\omega) = 1/j\omega$		
5. Two complex poles, $0.1 < \zeta < 1$, $G(j\omega) = (1 + j2\zeta u - u^2)^{-1}$, $u = \omega/\omega_n$		

Assíntotas para Magnitude

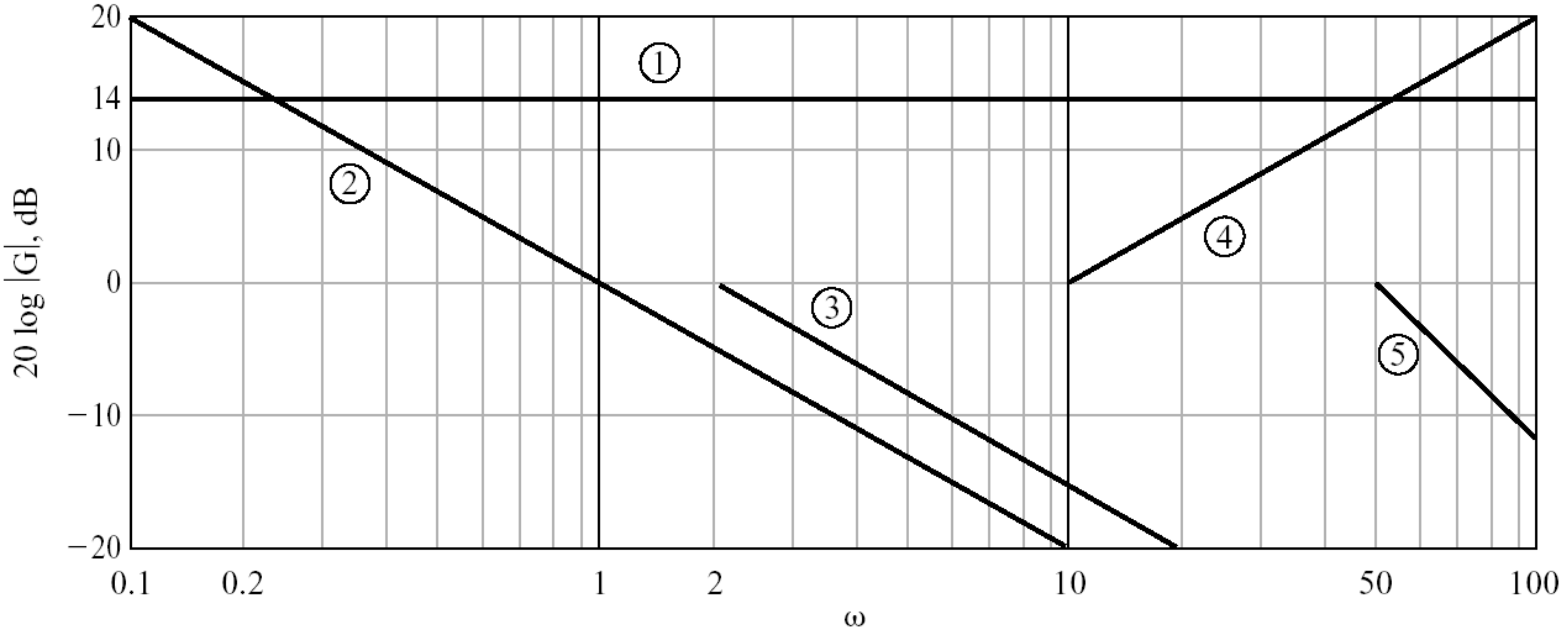


Gráfico para Magnitude

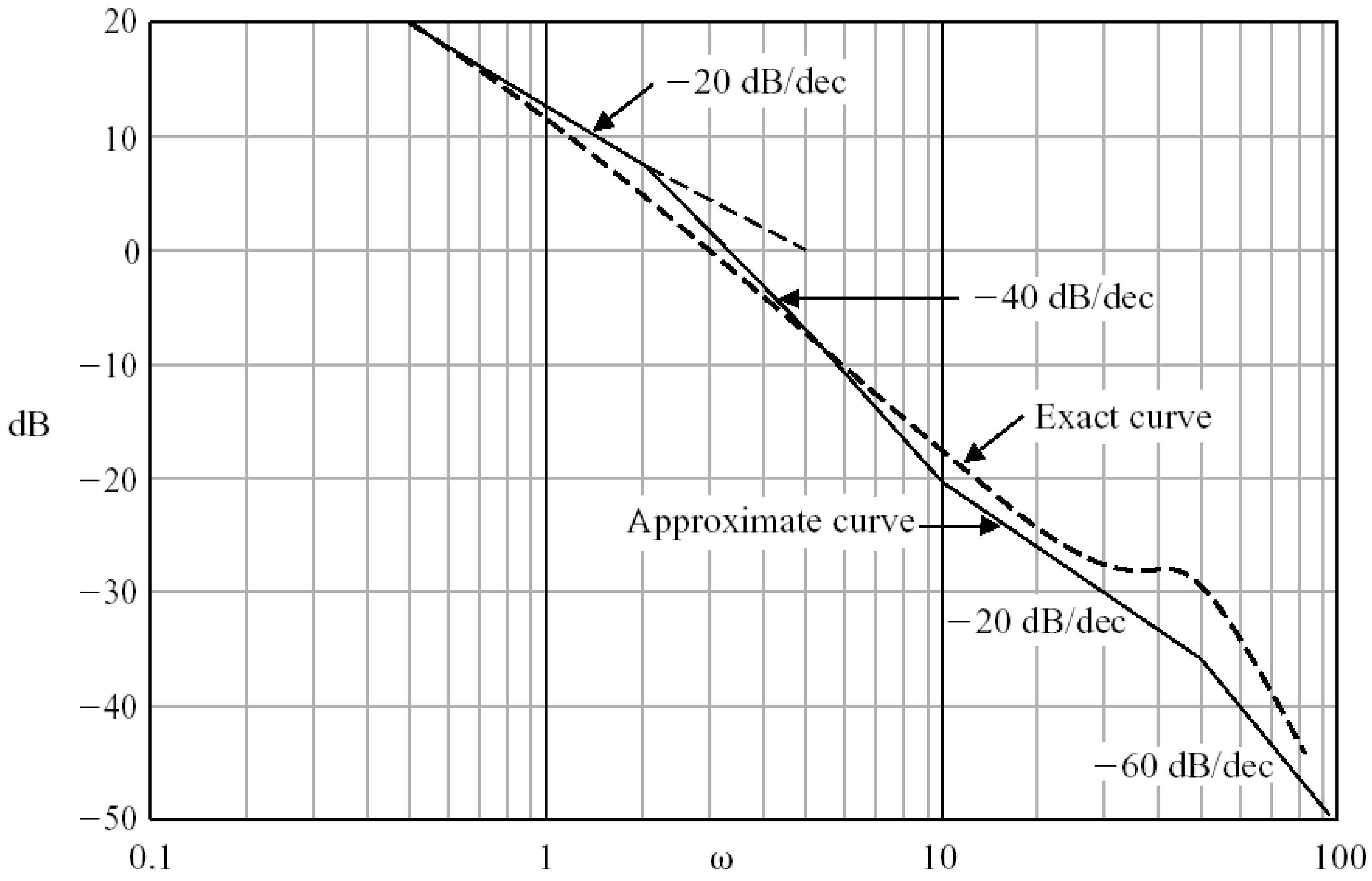


Gráfico para Fase

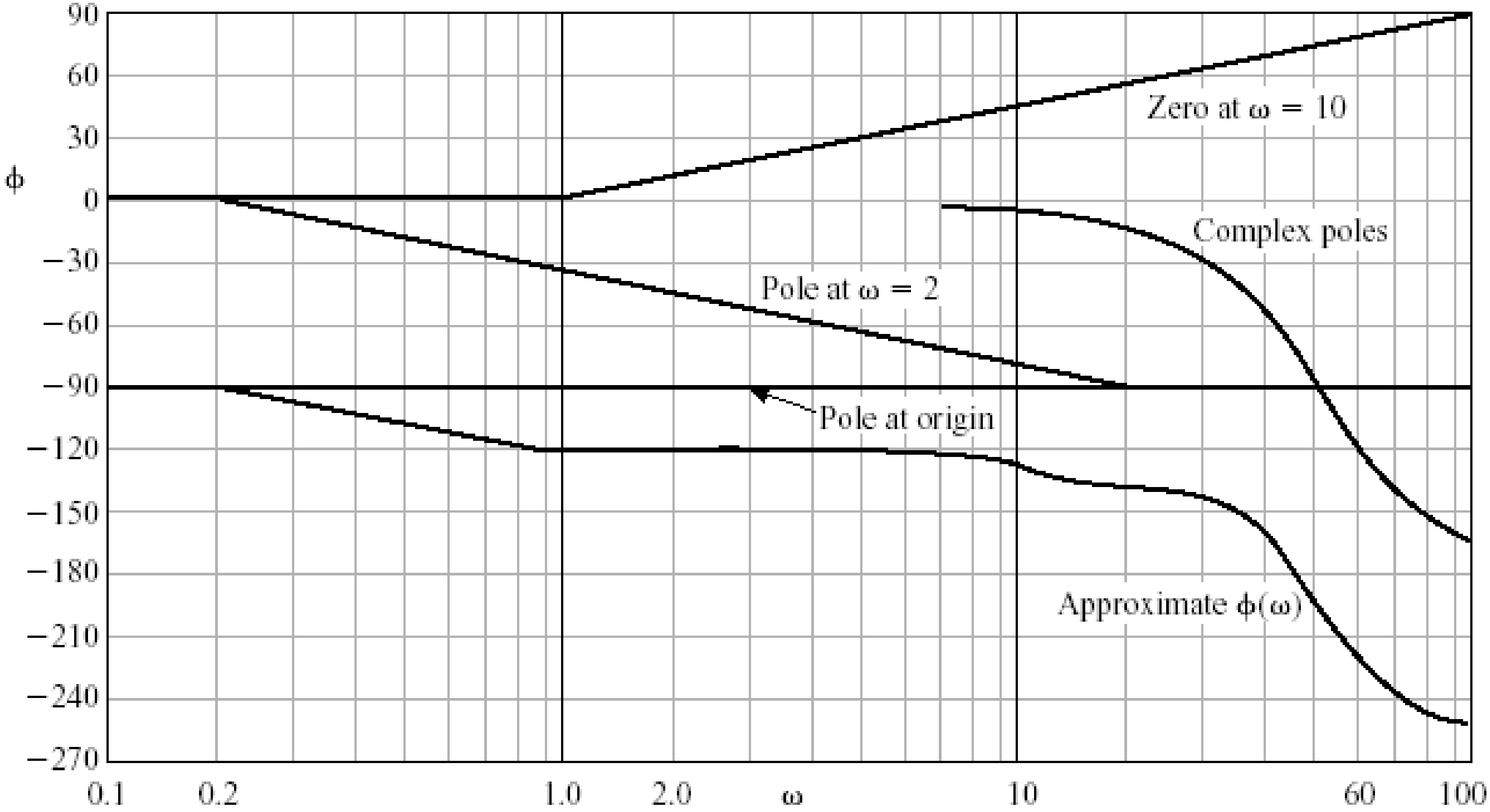
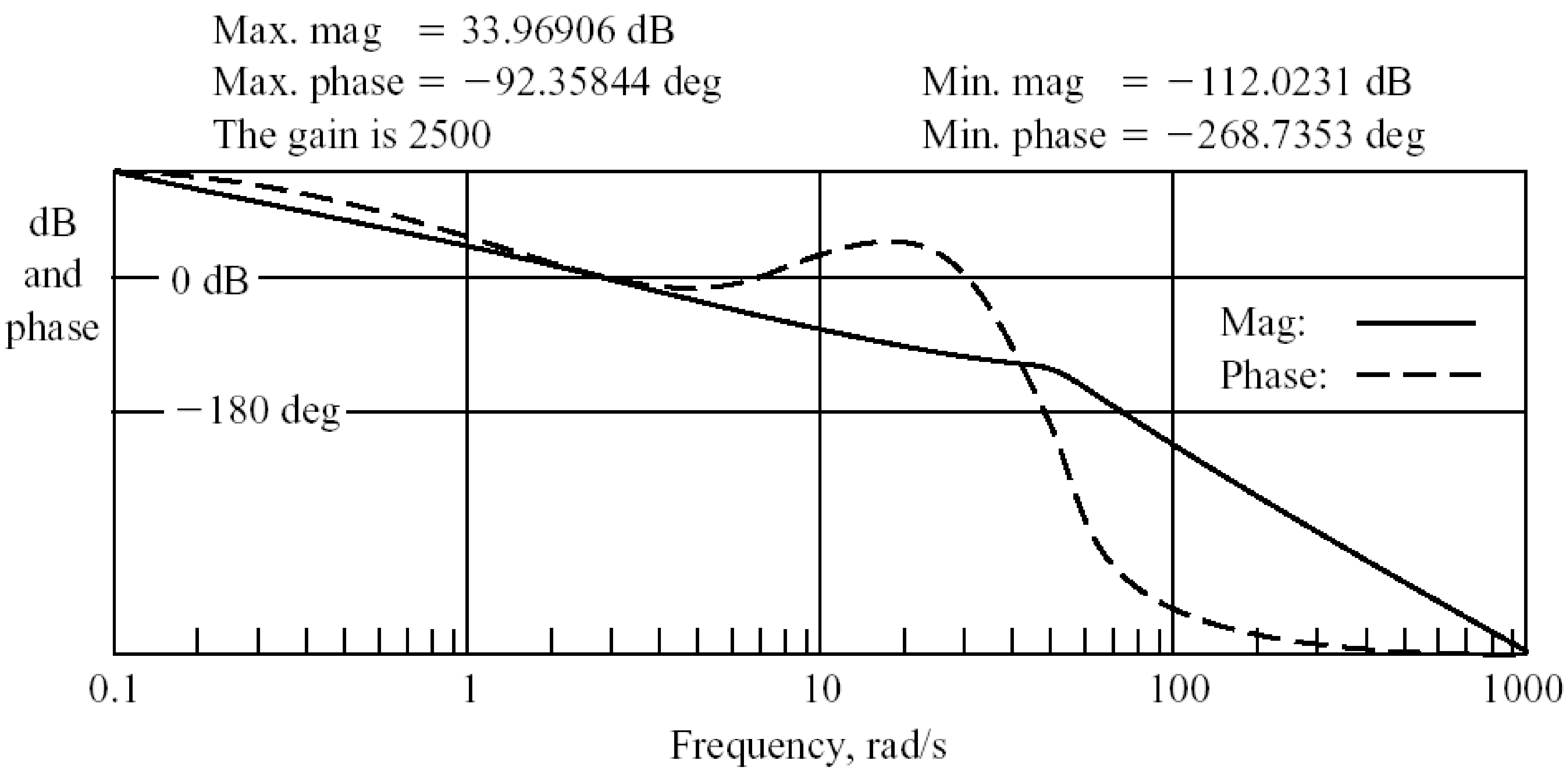


Diagrama de Bode

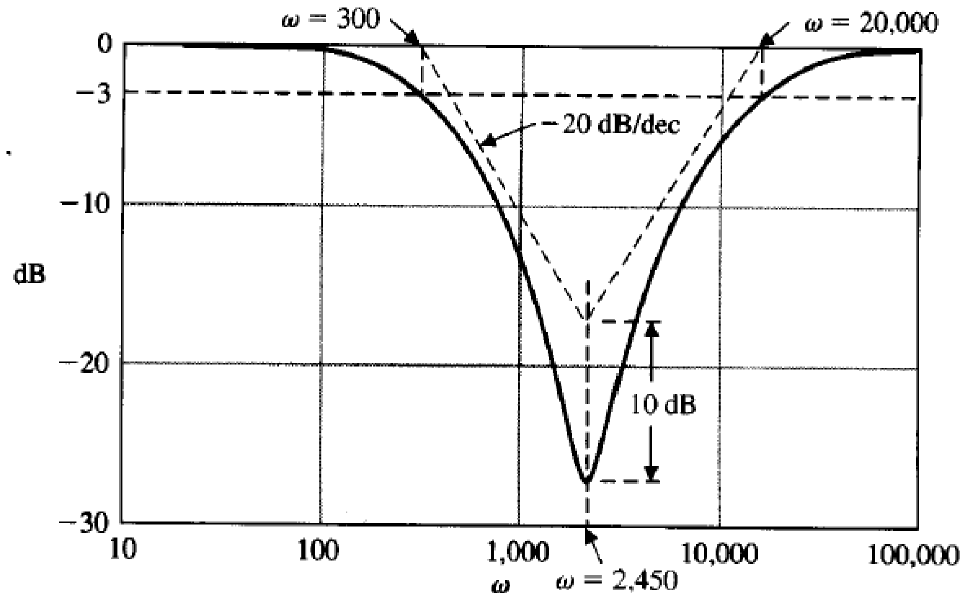


Medidas da Resposta em Frequência

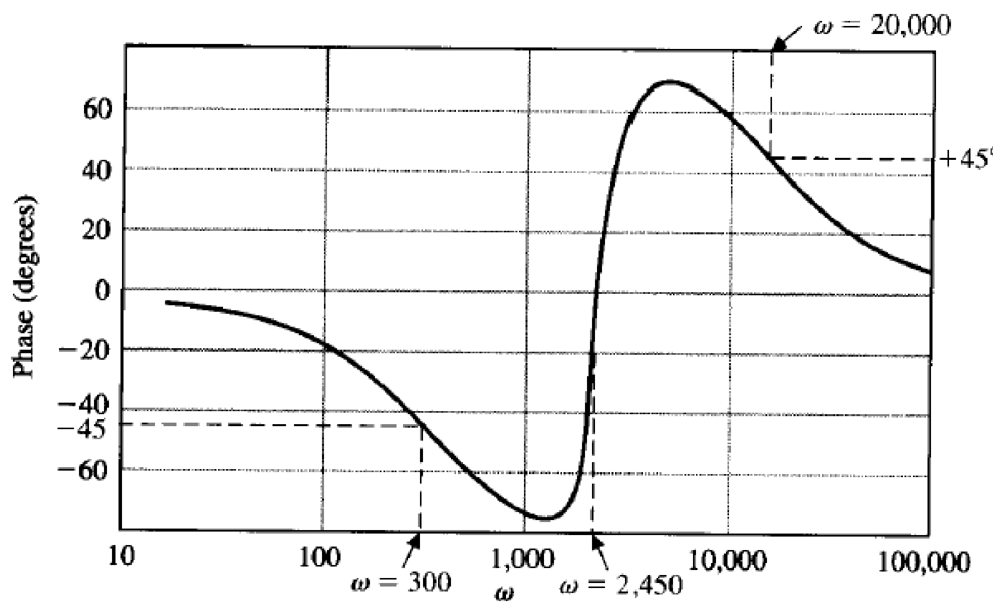
- A partir de gráficos de amplitude e de fase da resposta em frequência de um sistema determinados experimentalmente, a função de transferência pode ser obtida, utilizando-se o procedimento inverso ao do traçado do diagrama de Bode.

O que fazer?

Observar o traçado e identificar a presença de zeros, polos e ganho...


ω = 300
ω = 20,000
0
−3
−10
dB
−20
−30
20 dB/dec
10 dB
10
100
1,000
10,000
100,000
ω
ω = 2,450

(a)


ω = 20,000
60
40
20
0
−20
−40
−45
−60
Phase (degrees)
+45°
10
100
1,000
10,000
100,000
ω = 300
ω
ω = 2,450

(b)

Medidas da Resposta em Frequência

1. Há um polo em 300 rad/s.

2. Há um par de zeros complexos com w_n = 2.450 rad/s, com coeficiente de amortecimento ξ = 0,16.

3. Há um polo em 20.000 rad/s.

Como chegar a essas conclusões?

Medidas da Resposta em Frequência

1. Quando a frequência varia de 100 a 1000 rad/s, a inclinação assintótica é de -20 dB/década, sendo que, em w = 300 rad/s, a fase chega a -45º, com uma atenuação de 3 dB.

2. O sistema apresenta uma mudança brusca de fase, de aproximadamente 180º, passando por 0º em w = 2.450 rad/s, ponto aonde a inclinação assintótica muda de -20 dB/década para 20 dB/década. A diferença entre a amplitude das assíntotas e o valor mínimo, medido na freqüência de canto w_n = 2.450, que é de 10 dB indica que ξ = 0,16.

$$M_{p\omega} = 3{,}16 = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

Medidas da Resposta em Frequência

3. A amplitude retorna a 0 dB quando w excede 50.000 rad/s, o que permite concluir que há um polo no ponto em que a amplitude atinge novamente -3 dB e fase de +45º, ou w = 20.000 rad/s.

Então, qual éa FT?

$$T(s) = \frac{(s/2.450)^2 + (0,32/2450)s + 1}{(s/300+1)(s/20.000+1)}$$

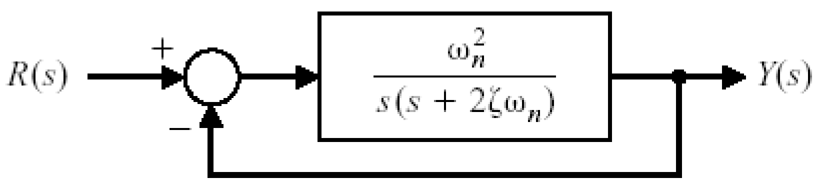
Especificações de Desempenho no Domínio da Frequência

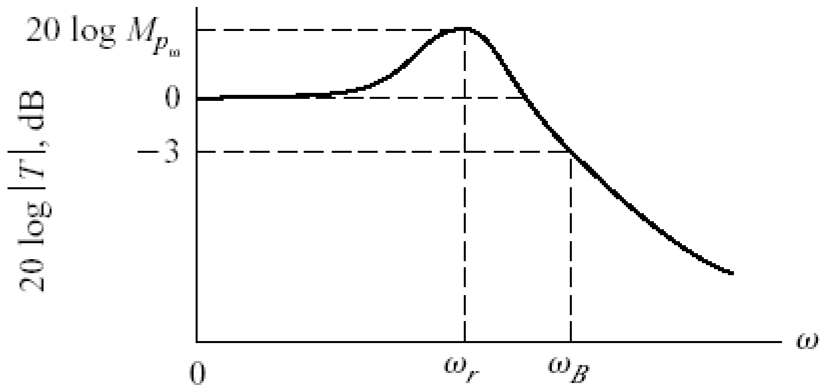
Veremos agora como relacionar as especificações de desempenho no domínio do tempo com as especificações no domínio da frequência, ou como especificar a resposta em frequência a partir das características transitórias temporais especificadas.

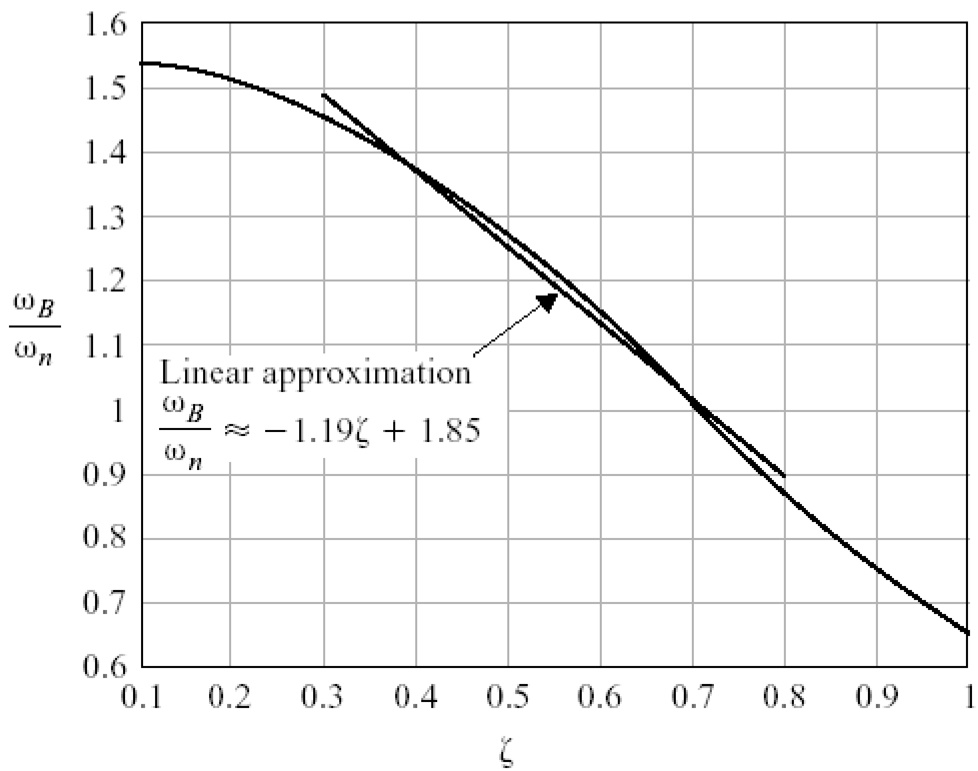
Especificações de Desempenho no Domínio da Frequência

- Já vimos que, para um sistema de segunda ordem genérico, o máximo da resposta em freqüência, M_{pw}, ocorre na frequência de ressonância, w_r.

- A faixa de passagem, w_B, corresponde à freqüência em que a resposta apresenta atenuação de 3 dB em relação ao seu valor em baixas freqüências, e tem relação com a velocidade de resposta do sistema, estando relacionada com a freqüência natural do sistema por meio de uma aproximação linear, apresentada no *slide* seguinte.


R(s)
+
−
$\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$
Y(s)


$20 \log M_{p_\omega}$
0
−3
$20 \log |T|$, dB
0
ω_r
ω_B
ω


$\frac{\omega_B}{\omega_n}$
Linear approximation
$\frac{\omega_B}{\omega_n} \approx -1.19\zeta + 1.85$
ζ

Especificações de Desempenho no Domínio da Frequência

- Lembremos da resposta de um sistema de segunda ordem a uma entrada em degrau unitário:

$$y(t) = 1 + Be^{-\xi\omega_n t}\cos(\omega_n + \theta)$$

Percebe-se que, para um coeficiente de amortecimento constante, quanto maior for o valor da frequência natural, mais rapidamente a resposta se aproximará do valor estacionário.

Especificações de Desempenho no Domínio da Freqüência

- Assim, as especificações no domínio da frequência são:

1. Ganho ressonante relativamente pequeno: $M_{pw} < 1.5$, por exemplo.

2. Faixa de passagem grande, de modo que a constante de tempo do sistema, $1/\xi w_n$, seja suficientemente pequena.

As relações anteriores são válidas se a resposta do sistema em estudo for dominada por um par de polos complexos. Na prática, a maioria dos sistemas de controle tem como polos dominantes um par de polos complexos conjugados. ☺