O Método do Lugar das Raízes
Parte 2

Controle de Sistemas I

Renato Dourado Maia
(FACIT)

Esboçando o Lugar das Raízes

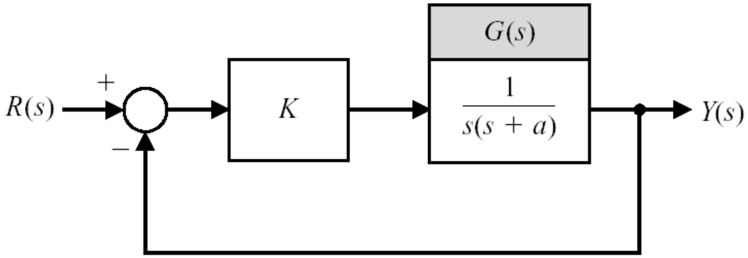
- O procedimento para se obter o traçado do gráfico do Lugar das Raízes é realizado por meio de um procedimento ordenado de 12 passos, conforme veremos a seguir.

Esboçando o Lugar das Raízes

- Passo 1: a equação característica deve ser escrita na forma $1+F(s)=0$. Caso seja necessário, a EC deve ser manipulada de forma que o parâmetro de interesse, K, apareça como um fator multiplicador, ou seja, $1+KP(s)=0$.

Esboçando o Lugar das Raízes

- Exemplo: consideremos o seguinte sistema:



Podemos determinar o LR em função do parâmetro a. A EC é:

$$\Delta(s) = 1 + KG(s) = 1 + \frac{K}{s(s+a)} = 0$$

$$\Delta(s) = s^2 + as + K = 1 + \frac{as}{s^2 + K} = 0$$

Esboçando o Lugar das Raízes

- Passo 2: caso seja necessário, utiliza-se fatoração para se escrever o polinômio P(s) na forma de pólos e zeros:

$$1 + K \frac{\prod_{i=1}^{M} (s + z_i)}{\prod_{j=1}^{n} (s + p_j)} = 0$$

Esboçando o Lugar das Raízes

- Passo 3: marcam-se os pólos e zeros no plano S com símbolos próprios (“X” e “o”, respectivamente). Normalmente, está-se interessado em determinar o LR quando K varia de zero a infinito, sendo que a EC pode ser reescrita como:

$$\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)+K\prod_{i=1}^{M}(s+z_i)=0$$

➔ Para K = 0, as raízes da EC são os pólos de P(s).

➔ Para K = ∞, as raízes da EC se aproximam dos zeros de P(s).

Esboçando o Lugar das Raízes

O Lugar das Raízes da equação característica $1 + KP(s) = 0$ começa nos pólos de $P(s)$ e termina nos zeros de $P(s)$, quando K é variado de zero a infinito.

Como normalmente $n > M$ (há mais pólos do que zeros), $n - M$ ramos do lugar das raízes tenderão a infinito (zeros no infinito).

Esboçando o Lugar das Raízes

- Localizam-se os segmentos do eixo real que pertencem ao LR:

O Lugar das Raízes no eixo real está sempre em uma seção do eixo real à esquerda de um número ímpar de pólos e zeros, o que pode ser verificado pela condição de ângulo.

Esboçando o Lugar das Raízes

- Passo 5: determina-se o número de curvas do LR, que é igual ao número de pólos, visto que o número de pólos é maior ou igual ao número de zeros finitos.

- Passo 6: o lugar das raízes e simétrico com relação ao eixo real, já que raízes complexas sempre aparecem em pares complexos conjugados.

Esboçando o Lugar das Raízes

- Passo 7: Se houver zeros no infinito, o LR tende a infinito, aproximando-se de assíntotas centradas em σ_A, ponto que é normalmente chamado de centróide, e com ângulo $\varnothing_A$:

$$\sigma_A = \frac{\sum \text{pólos de} P(s) - \sum \text{zeros de} P(s)}{n_p - n_z} = \frac{\sum_{j=1}^{n}(-p_j) - \sum_{i=1}^{M}(-z_i)}{n_p - n_z}$$

$$\phi_A = \frac{(2q+1)}{n_p - n_z} 180^0, \qquad q = 0, 1, 2, \ldots, \ (n_p - n_z - 1)$$

A equação para ângulo deriva do fato de que, a um ponto distante dos pólos e zeros finitos, pode-se considerar que os ângulos de cada pólo e zero, $\varnothing$, são essencialmente iguais e, portanto, o ângulo líquido é simplesmente $\varnothing(n_p – n_z)$, ou, alternativamente, $\varnothing = 180/(n_p – n_z)$.

Esboçando o Lugar das Raízes

- Passo 8: determina-se, quando pertinente, o ponto no qual o LR cruza o eixo imaginário, utilizando-se o critério de Routh-Hurwitz .

Esboçando o Lugar das Raízes

- Passo 9: determina-se, caso exista, o ponto de partida ou chegada no eixo real. O LR deixa o eixo real num ponto em que pequenas variações no parâmetro em estudo causam uma variação nula no ângulo líquido.

    - Ocorre nos casos em que há multiplicidade de raízes.
    - para obedecer a condição de ângulo, as tangentes do LR no ponto de partida/chegada são igualmente espaçadas sobre os 360º.

Esboçando o Lugar das Raízes

- O ponto de partida/chegada pode ser avaliado graficamente ou analiticamente. A maneira mais direta exige que se escreva a EC isolando o fator multiplicador K para que a EC apareça na forma p(s) = K.

Exemplo: seja o seguinte sistema a malha aberta, e seja considerada realimentação unitária:

$$G(s) = \frac{K}{(s+2)(s+4)} \Rightarrow 1 + G(s) = 1 + \frac{K}{(s+2)(2+4)} = (s+2)(s+4) + K = 0$$

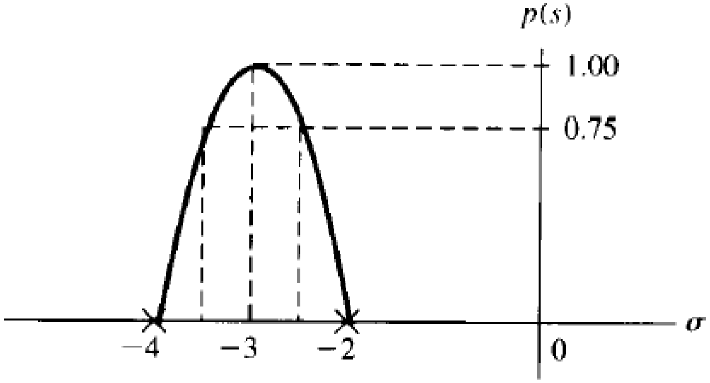
$$K = p(s) = -(s+2)(s+4)$$

Para esse caso em particular, espera-se, pelo esboço do LR, que o ponto de partida esteja próximo a s = σ = -3.

Esboçando o Lugar das Raízes

- Traçando-se o gráfico de $p(s)$ em função de σ, determina-se o ponto de máximo. Pode-se perceber que o gráfico é simétrico em relação a $\sigma = -3$, ou seja, máximo é o próprio ponto de partida/chegada.

s	-2	-2.25	-2.5	-2.75	-3	-3.25	-3.5	-3.75	-4
$p(s)$	0	0.44	0.75	0.94	1	0.94	0.75	0.44	0



Esboçando o Lugar das Raízes

- Como obter o mesmo resultado do slide anterior analiticamente?

Concluímos que o ponto de saída/chegada corresponde ao máximo de p(s)... Então, basta derivar p(s) e igualar a zero...

$$\frac{dK}{ds} = \frac{dp(s)}{ds} = 0$$

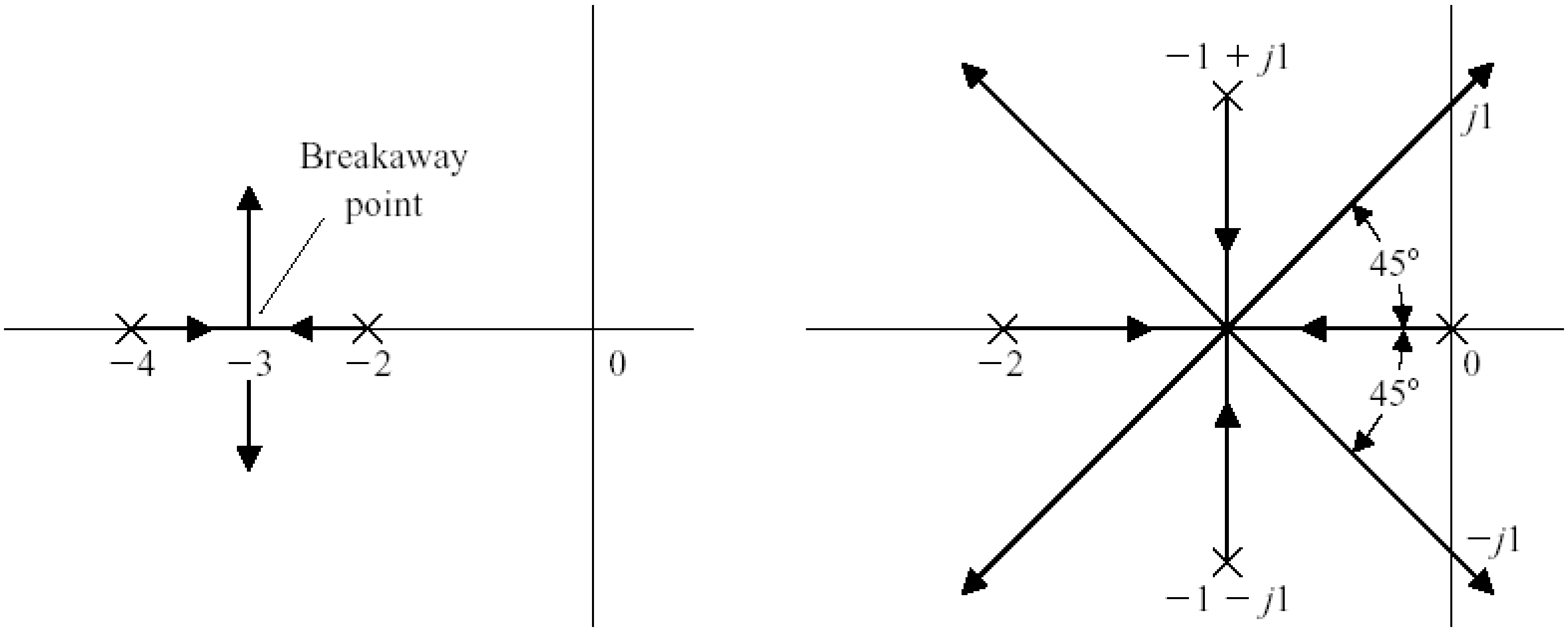
Para o exemplo:

$$K = p(s) = -(s+2)(s+4) = -(s^2+6s+8)$$

$$\frac{dp(s)}{ds} = -(2s+6) = 0$$

$$s = \sigma = -3$$

Esboçando o Lugar das Raízes



Visualizando as tangentes: passo 9

Esboçando o Lugar das Raízes

- Exemplo: seja um sistema com a seguinte EC:

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)} = 0$$

Quantas assíntotas? (n_p – n_z) = 2... Dois pólos caminharão para zeros no infinito... Devem ser calculados os ângulos e a centróide das assíntotas.

$$\phi_A = \frac{(2q+1)}{n_p - n_z} 180^0 = \frac{(2(0)+1)}{2} 180^0 = 90^0$$

$$\phi_A = \frac{(2(1)+1)}{2} 180^0 = 270^0 = -90^0$$

$$\sigma_A = \frac{\sum_{j=1}^{n}(-p_j) - \sum_{i=1}^{M}(-z_i)}{n_p - n_z} = \frac{[0 + (-2) + (-3)] - [-1]}{2} = -2$$

Esboçando o Lugar das Raízes

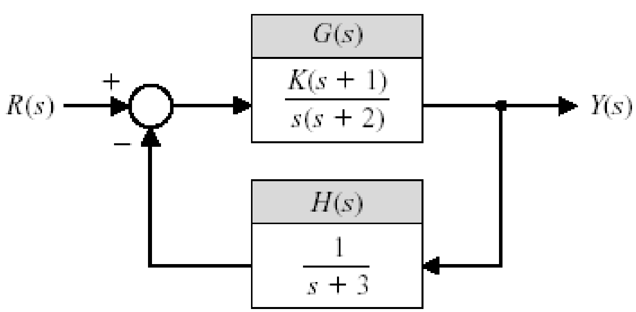
- E o ponto de partida?

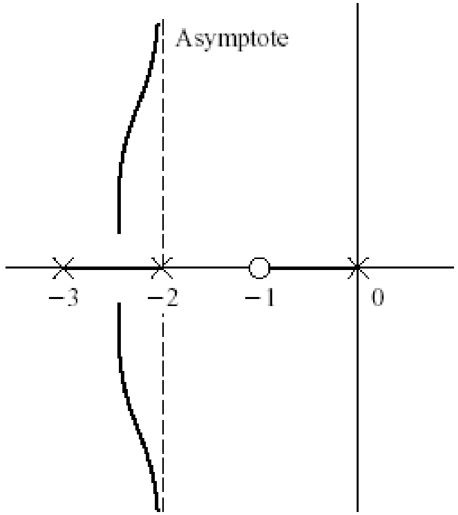
$$K = p(s) = \frac{-s(s+2)(s+3)}{(s+1)}$$

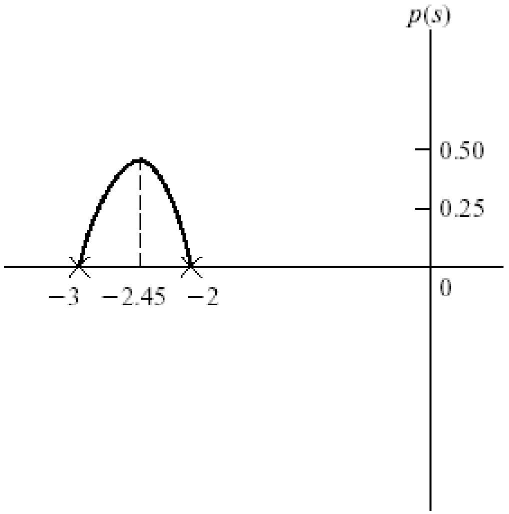
$$\frac{dK}{ds} = \frac{2s^3 + 8s^2 + 10s + 6}{(s+1)^2} = 0$$

Raízes: $\{-2.4656; \; -0.7672 \pm j0.7926\} \Rightarrow s = -2.4656$

Esboçando o Lugar das Raízes







Esboçando o Lugar das Raízes

- Passo 10: determina-se o ângulo de partida do lugar das raízes de um pólo e o ângulo de chegada em cada zero, utilizando-se a condição de ângulo. O ângulo de partida ou chegada corresponde à diferença entre o ângulo líquido devido a todos os outros pólos e zeros e à condição de ângulo de $180^o(2q + 1)$. A determinação desse ângulo é particularmente de interesse para pólos (ou zeros) complexos, já que essa informação é muito útil para completar o traçado do lugar das raízes.

Esboçando o Lugar das Raízes

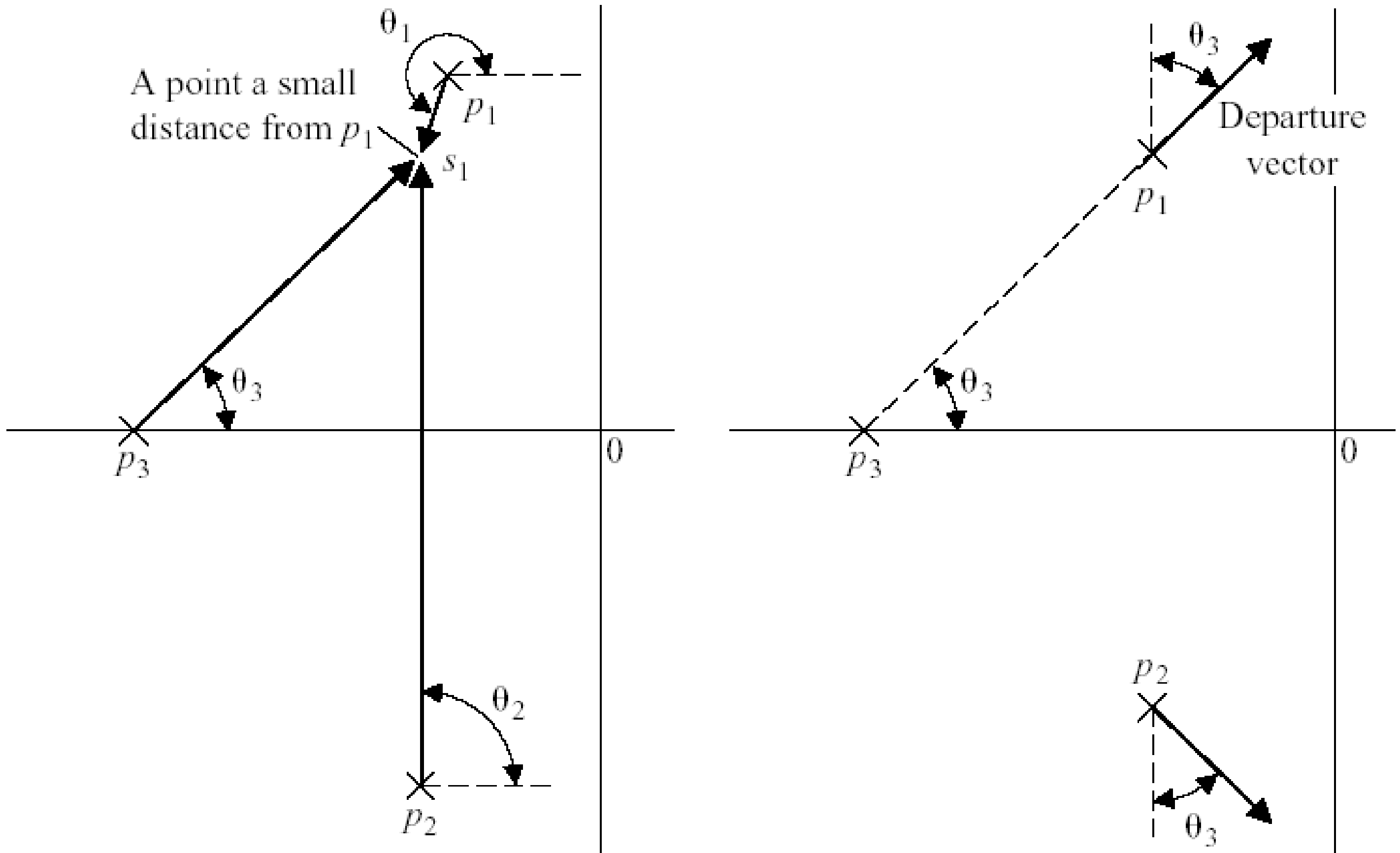
- Exemplo: seja o seguinte sistema em malha aberta de terceira ordem, com dois pólos complexos p_1 e p_2.

$$F(s) = G(s)H(s) = \frac{K}{(s+p_3)(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$$

Num ponto de teste s_1, a uma distância infinitesimal de p_1, tem-se, pela condição de ângulo:

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \theta_1 + 90^0 + \theta_3 = +180^0 \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = 90^0 - \theta_3$$

Esboçando o Lugar das Raízes



Esboçando o Lugar das Raízes

- Passo 11: determinação da localização das raízes que satisfazem a condição de ângulo:

$$\angle P(s) = 180^0 \pm q360^0, \quad q = 1, 2, \ldots$$

numa raiz s_x, com $x = 1, 2, 3, \ldots, n_p$

- Passo 12: determinação do valor do parâmetro K_x, para uma raiz específica s_x, por meio da utilização da condição de módulo:

$$K_x = \left. \frac{\prod_{j=1}^{n} |(s + p_j)|}{\prod_{i=1}^{m} |(s + z_i)|} \right|_{s=s_x}$$

Exemplo

- Façamos um exemplo completo, considerando-se a seguinte equação característica (o passo 1 já está pronto...):

$$1 + \frac{K}{s^4 + 12s^3 + 64s^2 + 128s} = 0$$

- No passo 2, a EC é escrita na forma fatorada:

$$1 + \frac{K}{s(s+4)(s+4+j4)(s+4-j4)} = 0$$

Exemplo

- No passo 3, são desenhados os pólos e os zeros na plano S...

- No passo 4, são determinados os segmentos do eixo real que pertencem ao LR, que ficam à esquerda de um número ímpar de pólos e zeros:

  - Para o nosso exemplo, o segmento entre $s = 0$ e $s = -4$ faz parte do LR...

Exemplo

- No passo 5, é determinado o número de curvas do LR... Como o número de pólos n_p é 4, tem-se que há 4 curvas...

- Do passo 6, sabemos que o LR é simétrico em relação ao eixo real...

Exemplo

- No passo 7, são determinados os ângulos e a centróide das assíntotas para os lugares que prosseguem em direção aos zeros no infinito:

$$\phi_A = \frac{(2q+1)}{n_p - n_z} 180^0, \quad q = 0, 1, 2, 3$$

$$\phi_A = 45^0, 135^0, 225^0, 315^0$$

$$\sigma_A = \frac{\sum_{j=1}^{n}(-p_j) - \sum_{i=1}^{M}(-z_i)}{n_p - n_z} = \frac{[0 + (-4) + (-4 - j4) + (-4 + j4)] - [0]}{4} = -3$$

Exemplo

- No passo 8, determina-se, caso exista, o ponto de cruzamento do LR com o eixo imaginário. A EC é:

$$s^4 + 12s^3 + 64s^2 + 128s + K = 0$$

Arranjo de Routh:

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 64 & K \\ s^3 & 12 & 128 & \\ s^2 & b_1 & K & \\ s^1 & c_1 & & \\ s^0 & K & & \end{array}$$

$$\begin{cases} b_1 = \dfrac{12(64) - 128}{12} = 53.33 \\ \\ c_1 = \dfrac{53.33(128) - 12K}{53.33} > 0 \end{cases}$$

Para se ter estabilidade, $K < 568.89$. Para $K = 568.89$, c_1 é zero e o polinômio auxiliar fornece as raízes $+ j3.266$ e $- j3.266$, que são os pontos de cruzamento com o eixo imaginário...

Exemplo

- No passo 9, determina-se, caso exista, o ponto de partida no eixo real.

$$K = p(s) = -s(s+4)(s+4+j4)(s+4-j4)$$

$$\frac{dK}{ds} = 4s^3 + 36s^2 + 128s + 128 = 0$$

Raízes: $\{-1.5767, \ -3.7117 \pm j2.5533\}$

O ponto de partida é: $s = -1.5767$

Exemplo

- No passo 10, determinam-se ângulos de partida de pólos e de chegada nos zeros, por meio do critério de ângulo. Para o pólo p_1:

$$\theta_{p_1} + \theta_{p_2} + \theta_{p=-4} + \theta_{p=0} = \theta_{p_1} + 90^0 + 90^0 + \theta_{p=0} = 180^0$$

Logo:

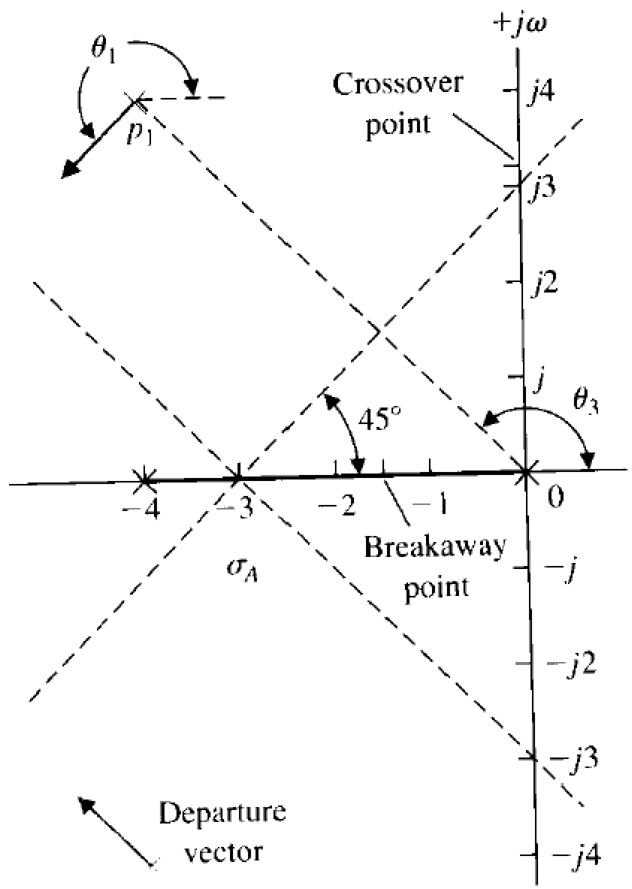
$$\begin{aligned} \theta_{p_1} &= -\theta_{p=0} \\ &= -\left[90^0 + tan^{-1}\left(\frac{4}{4}\right)\right] \\ &= -(90^0 + 45^0) \\ &= -135^0 \\ &= 225^0 \end{aligned}$$

Exemplo

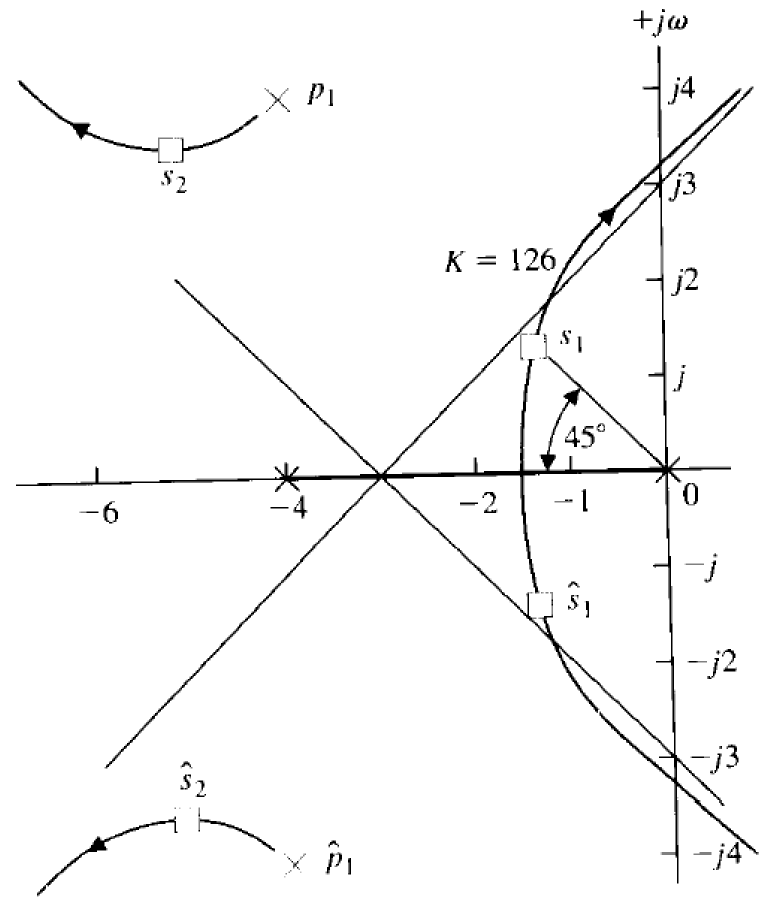
- No passo 11, são determinados os pontos que satisfazem o critério de ângulo e o passo 12 corresponde a escolher um ponto de teste e calcular o respectivo valor do parâmetro K por meio do critério de módulo...

E o gráfico???

Exemplo



$+j\omega$
θ_1
p_1
Crossover point
$j4$
$j3$
$j2$
j
θ_3
45°
-4
-3
-2
-1
0
σ_A
Breakaway point
$-j$
$-j2$
$-j3$
$-j4$
Departure vector



$+j\omega$
p_1
s_2
$j4$
$j3$
$K = 126$
$j2$
s_1
j
45°
-6
-4
-2
-1
0
$-j$
$\hat{s}_1$
$-j2$
$-j3$
$\hat{s}_2$
$\hat{p}_1$
$-j4$