Controle de Sistemas

O Método do Lugar das Raízes

Renato Dourado Maia

Universidade Estadual de Montes Claros

Engenharia de Sistemas

Unimontes

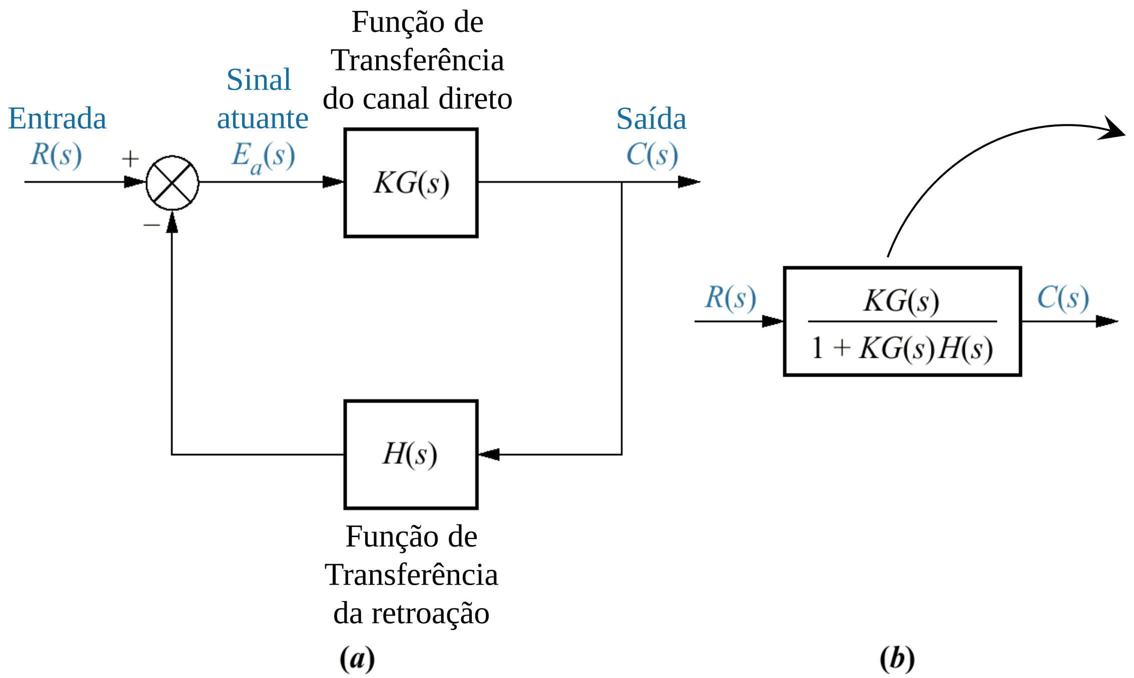
Introdução

- No projeto de um sistema de controle, é fundamental se determinar como a localização das raízes da equação característica no plano S umda com a variação de um parâmetro. Essa localização das raízes, ou Lugar das Raízes (LR), é normalmente feita por um método gráfico conhecido como Gráfico do Lugar das Raízes.

Conceito de Lugar das Raízes

- O Lugar das Raízes, uma apresentação gráfica dos polos a malha fechada em função da variação de um parâmetro de sistema, é um poderoso método de análise e projeto. Ele permite análises qualitativa e quantitativa, e fornece mais informações do que os demais métodos que já estudamos.

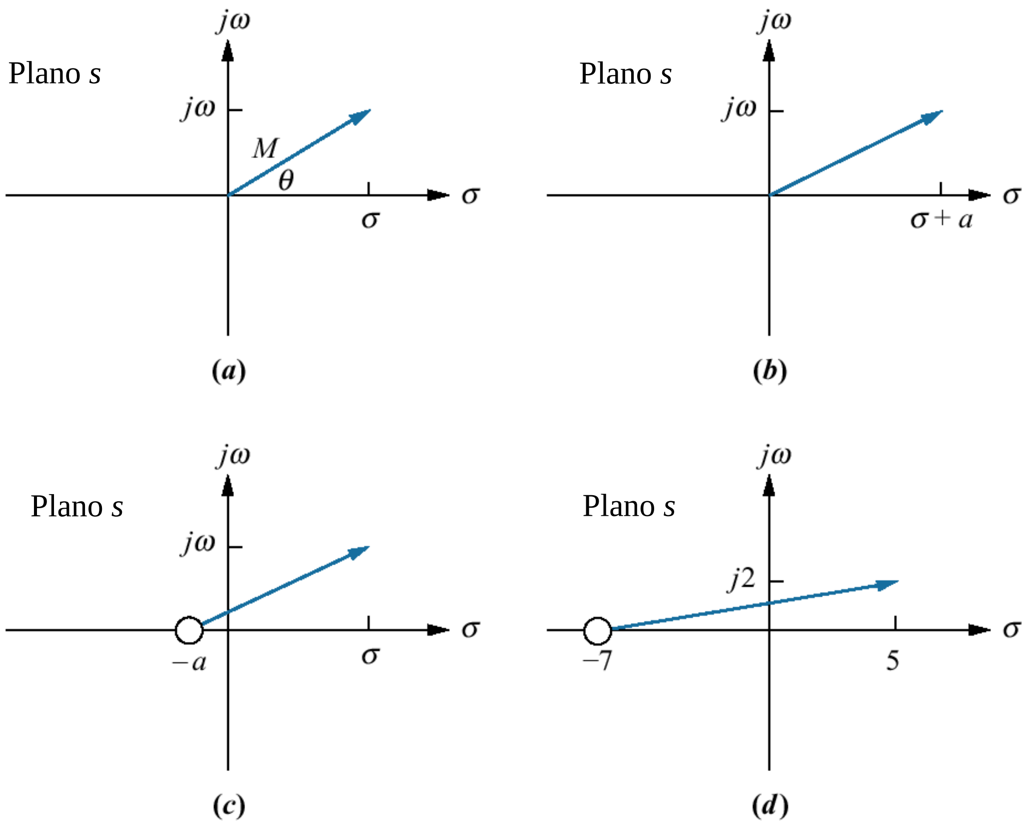
Conceito de Lugar das Raízes



Modificações no ganho alteram os polos da malha fechada!

(a) Sistema a Malha Fechada.
(b) Função de Transferência Equivalente.

Representação Vetorial de Números Complexos



(a) $s = \sigma + j\omega$

(b) $(s+a)$

(c) $(s+a)$

(c) $(s+7)\big|_{s \to (5+j2)}$

$(s+a) \longrightarrow$ é um nº complexo, e pode ser representado por um vetor traçado a partir do zero da função até o ponto s.

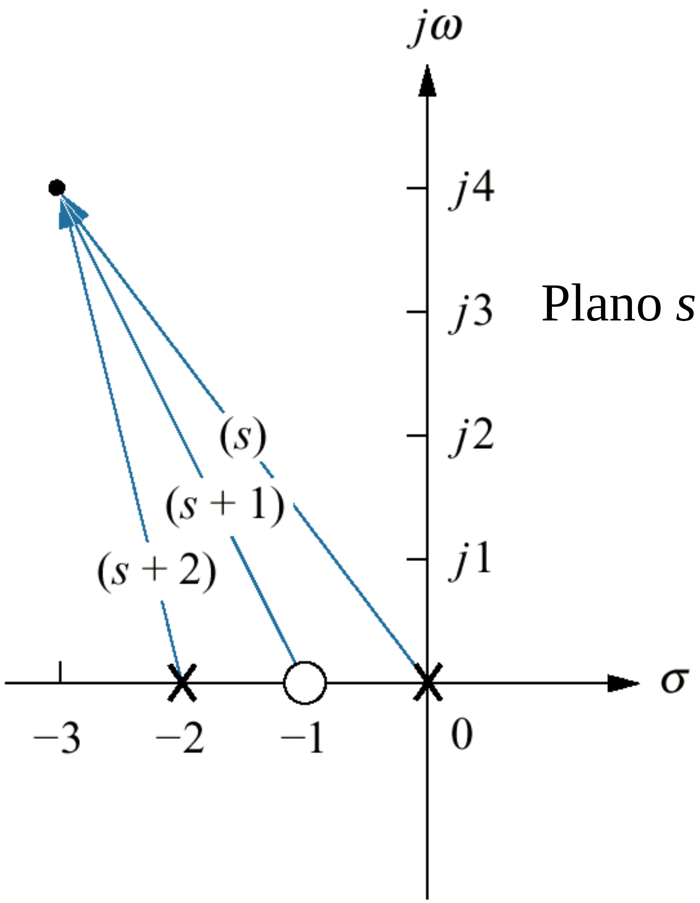
Representação Vetorial de Números Complexos

$$F(s) = \frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_i)} = \frac{\prod \textit{fatores complexos do numerador}}{\prod \textit{fatores complexos do denominador}}$$

Cada fator do numerador e do denominador é um número complexo, que pode ser representado por um vetor. A função define a aritmética complexa a ser executada para calcular F(s) em qualquer ponto s.

Representação Vetorial de Números Complexos

$$F(s) = \frac{(s+1)}{s(s+2)}$$



Representação Vetorial de Números Complexos

- Considerando a representação vetorial, tem-se, para a magnitude:

$$M = \frac{\prod comprimentos\ dos\ zeros}{\prod comprimentos\ dos\ pólos} = \frac{\prod_{i=1}^{m} \left|(s+z_i)\right|}{\prod_{j=1}^{n} \left|(s+p_i)\right|}$$

O comprimento de um zero é a magnitude do vetor traçado a partir do zero de F(s) em $-z_i$ até o ponto s, e o comprimento de um polo é a magnitude do vetor traçado a partir do polo de F(s) em $-p_i$ até o ponto s.

Representação Vetorial de Números Complexos

- Considerando a representação vetorial, tem-se, para o ângulo:

$$\theta = \sum \hat{a}ngulos\ dos\ \ zeros\ - \sum \hat{a}ngulos\ dos\ p\acute{o}los$$

$$\theta = \sum_{i=1}^{m} \angle(s + z_i) - \sum_{j=1}^{n} \angle(s + p_i)$$

O ângulo de um zero é o ângulo, medido no sentido trigonométrico, a partir do eixo real, de um vetor traçado do zero de F(s) em $-z_i$ até o ponto s, e o ângulo de um pólo é o ângulo, medido no sentido trigonométrico, a partir do eixo real, de um vetor traçado do pólo de F(s) em $-p_i$ até o ponto s.

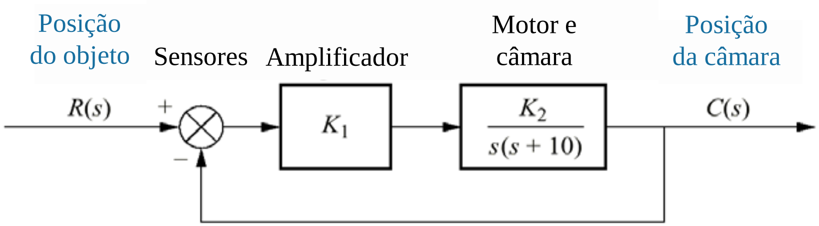
Conceito de Lugar das Raízes

a) O sistema *CameraMan®* *Presenter Camera* rastreia automaticamente um objeto que utiliza sensores de infravermelho frontal e traseiro (o sensor frontal é também um microfone); comandos de rastreamento e de áudio são passados ao *CameraMan* por meio de um enlace de radiofrequência de uma unidade utilizada pelo objeto.

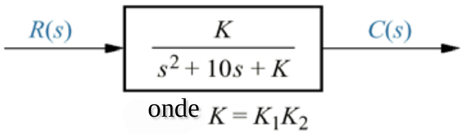
(b) Diagrama de blocos.

(c) Função de transferência a malha fechada.

(*a*)



(*b*)



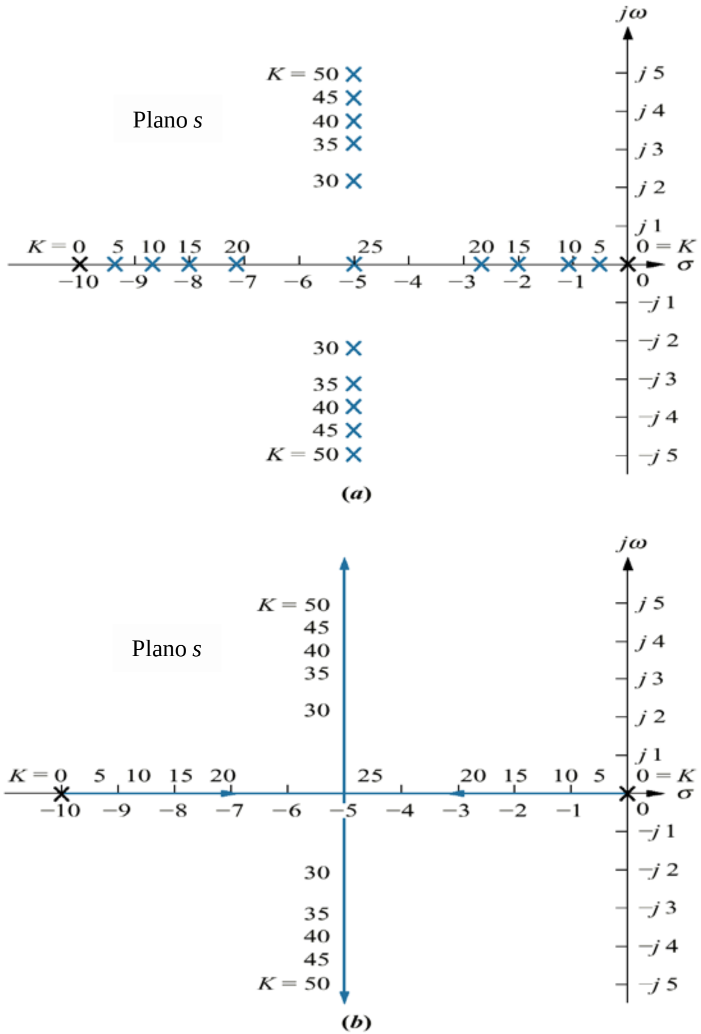
(*c*)

Conceito de Lugar das Raízes

Localização dos Polos em Função do Ganho do Sistema

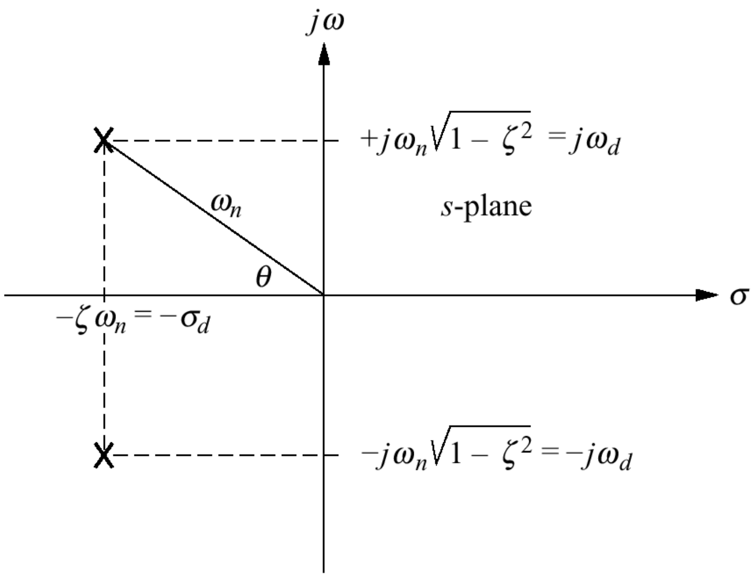
K	Polo 1	Polo 2
0	–10	0
5	–9,47	–0,53
10	–8,87	–1,13
15	–8,16	–1,84
20	–7,24	–2,76
25	–5	–5
30	$-5 + j2{,}24$	$-5 - j2{,}24$
35	$-5 + j3{,}16$	$-5 - j3{,}16$
40	$-5 + j3{,}87$	$-5 - j3{,}87$
45	$-5 + j4{,}47$	$-5 - j4{,}47$
50	$-5 + j5$	$-5 - j5$

Conceito de Lugar das Raízes



(a) Diagrama de Polos.

(b) Lugar das Raízes.



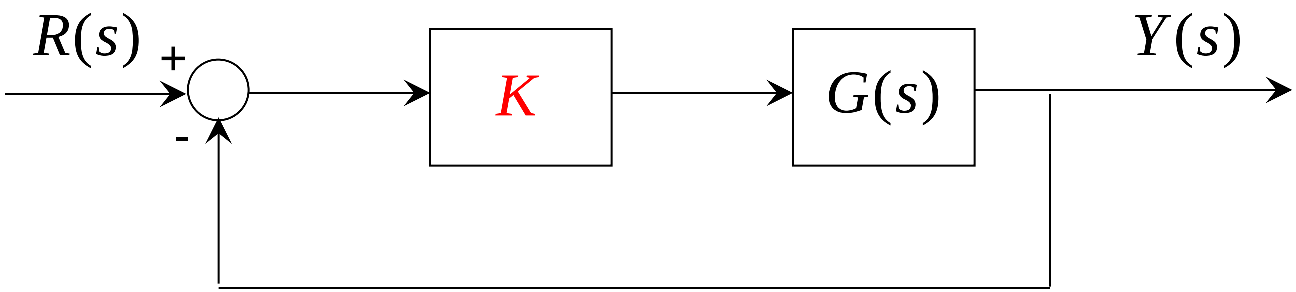
Que conclusões podemos tirar por meio da análise do lugar das raízes do *CameraMan®*?

Conceito de Lugar das Raízes

- As conclusões para um sistema simples como o *CameraMan*® podem parecer triviais. Todavia, é importante perceber que o Lugar das Raízes representa uma técnica importante para analisar sistemas de ordem maior do que dois...

Propriedades Lugar das Raízes

- Seja o seguinte sistema:



Função de Transferência da Malha Fechada: $T(s) = \dfrac{KG(s)}{1+KG(s)}$

Equação Característica: $\Delta(s) = 1 + KG(s) \rightarrow KG(s) = -1 = -1 + j0$

$$\left| KG(s) \right| = 1$$

$$\angle KG(s) = 180^\circ \pm k360^\circ,\ k = 0,1,2,\cdots$$

Forma Polar

Propriedades Lugar das Raízes

- Assim, para que um ponto s pertença ao Lugar das Raízes, é necessário que:

$$\begin{cases} |KG(s)| = 1 \\ \angle KG(s) = 180^\circ \pm k360^\circ,\ k = 0, 1, 2, \cdots \end{cases}$$

Propriedades Lugar das Raízes

- Exemplo: $G(s) = \dfrac{1}{s(s+2)}$

Equação Característica: $\begin{cases} \Delta(s) = 1 + KG(s) = 1 + \dfrac{K}{s(s+2)} = 0 \\ \Delta(s) = s^2 + 2s + K = 0 \end{cases}$

Lugar das raízes: $\begin{cases} \left|KG(s)\right| = \left|\dfrac{K}{s(s+2)}\right| = 1 \\ \angle KG(s) = \pm 180°, \pm 540°, \cdots \end{cases}$

Propriedades Lugar das Raízes

- Vamos calcular as raízes da equação característica para K variando de zero até infinito...

Equação Característica: $\Delta(s) = s^2 + 2s + K = 0$

$$K = 0 \quad \Rightarrow \{-2, 0\}$$

$$K = 0.5 \quad \Rightarrow \{-1.7071, -0.2929\}$$

$$K = 1 \quad \Rightarrow \{-1, -1\}$$

$$K = 2 \quad \Rightarrow \{-1 \pm j\}$$

$$K = 5 \quad \Rightarrow \{-1 \pm j2\}$$

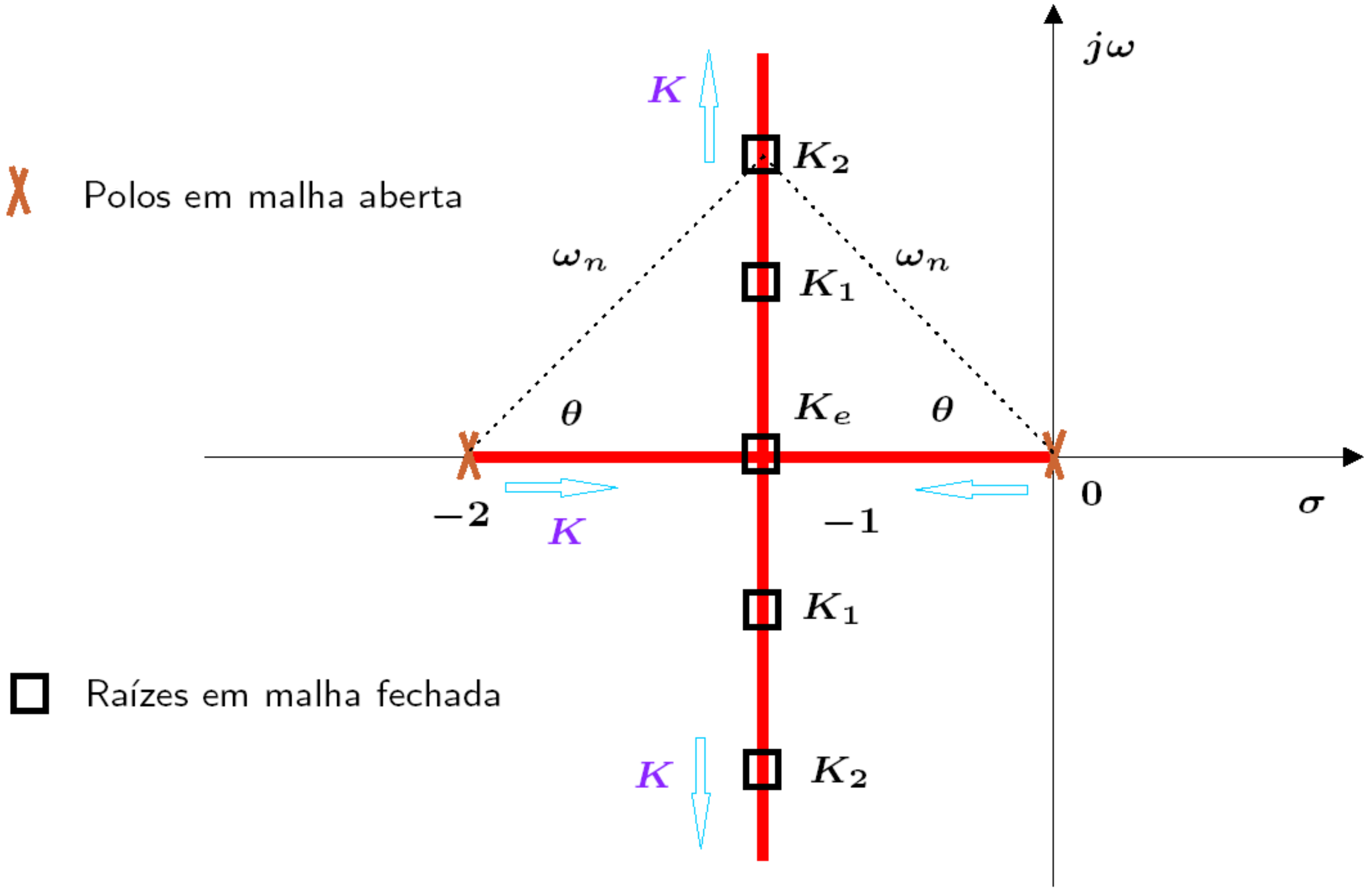
$$K = 10^2 \quad \Rightarrow \{-1 \pm j9.9499\}$$

$$K = 10^6 \quad \Rightarrow \{-1 \pm j10^3\}$$

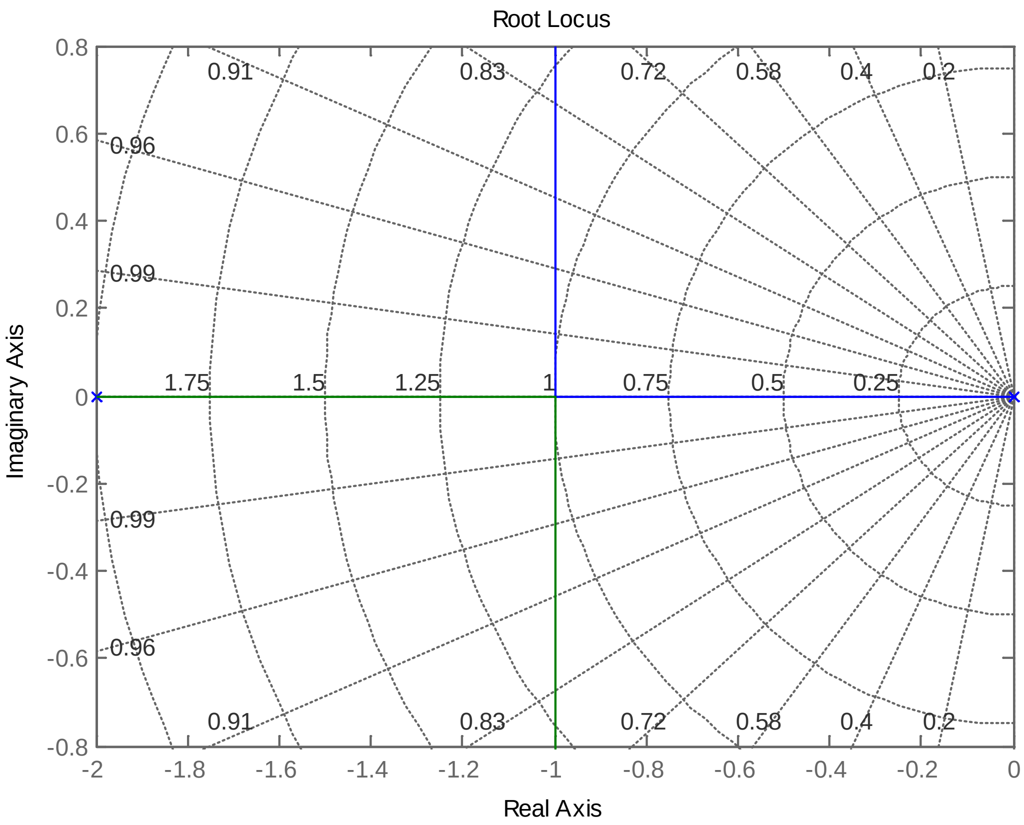
$$K = 10^{15} \quad \Rightarrow \{-1 \pm j3.16 \times 10^7\}$$

Para K = 0, têm-se os polos da malha aberta. Para K muito grande, os polos vão para infinito... Agora é só fazer o desenho...

Propriedades Lugar das Raízes



Propriedades Lugar das Raízes



$$\Delta(s) = 1 + \frac{K}{s(s+2)} = 0$$

Matlab:

```
>>rlocus([1],[1 2 0])
```

Propriedades Lugar das Raízes

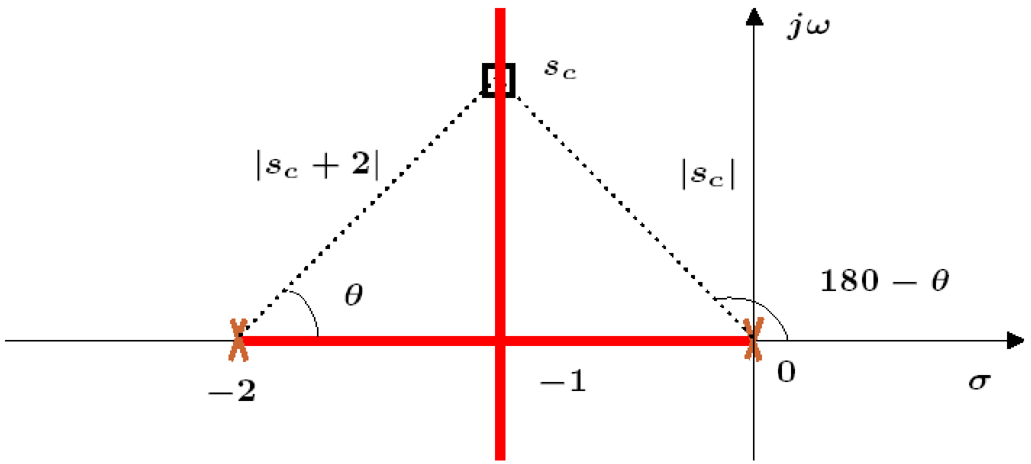
- Para que um ponto pertença ao Lugar das Raízes, qual condição deve ser satisfeita?

A condição de ângulo, sendo que a condição de módulo fornece o valor do ganho que aloca a raiz naquele ponto!

Pode-se observar que, para que a condição de ângulo seja obedecida, o LR corresponde a uma linha vertical, para $\zeta < 1$ (subamortecimento), e uma linha horizontal, para $\zeta > 1$ (sobreamortecimento). Vamos analisar essas conclusões nos dois próximos *slides*...

Propriedades Lugar das Raízes

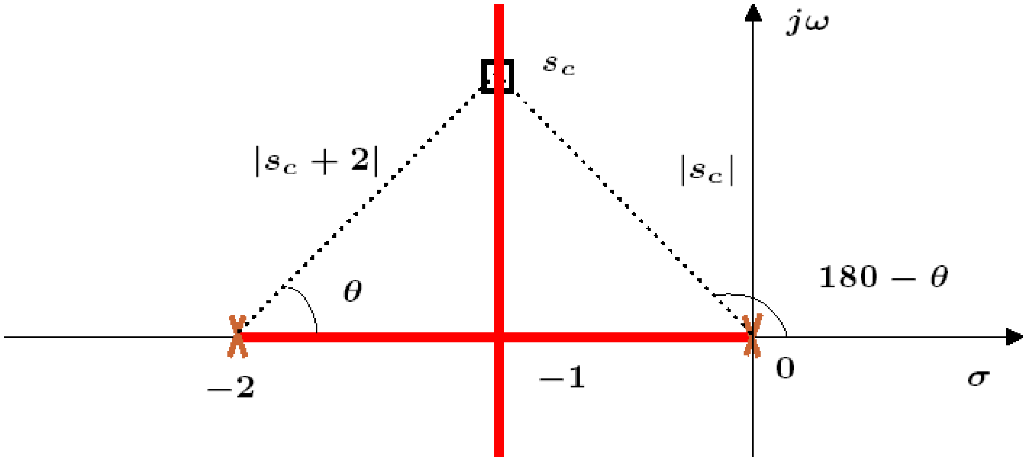
- Para um ponto qualquer, s_c, sobre a reta vertical, obtém-se a contribuição dos dois polos, s_1 e s_2, da seguinte maneira:



$$\angle \left.\frac{K}{s(s+2)}\right|_{s=s_c} = -\angle s_c - \angle(s_c+2) = -\left[(180^\circ - \theta) + \theta\right] = -180^\circ$$

Propriedades Lugar das Raízes

- E como determinar o ganho no ponto s_c?



$$\left|\frac{K}{s(s+2)}\right|_{s=s_c} = \frac{K}{|s_c||s_c+2|} = 1 \Rightarrow K = |s_c||s_c+2|$$

Propriedades Lugar das Raízes

- Consideremos a EC escrita na forma: $\Delta(s) = 1 + F(s)$

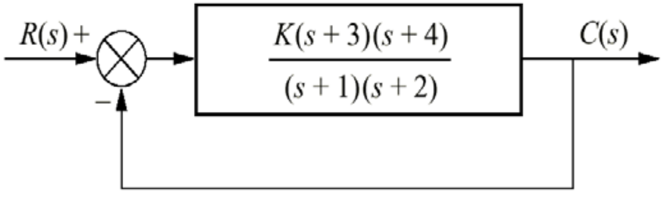
$$F(s) = K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{l=1}^{n}(s+p_l)}$$

Sabemos que: $F(s) = -1 + j0$

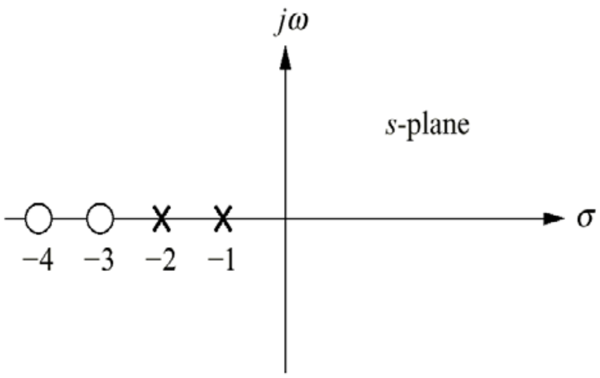
Logo: $\left| K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{l=1}^{n}(s+p_l)} \right| = 1 \quad e \quad \sum_{i=1}^{m}\angle(s+z_i) - \sum_{l=1}^{n}\angle(s+p_l) = 180° \pm k360°$

Propriedades Lugar das Raízes

Exemplo:



(a)



(b)

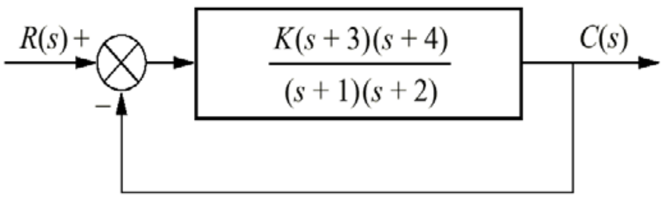
(a) Sistema de exemplo.

(b) Diagrama de polos e zeros de G(s).

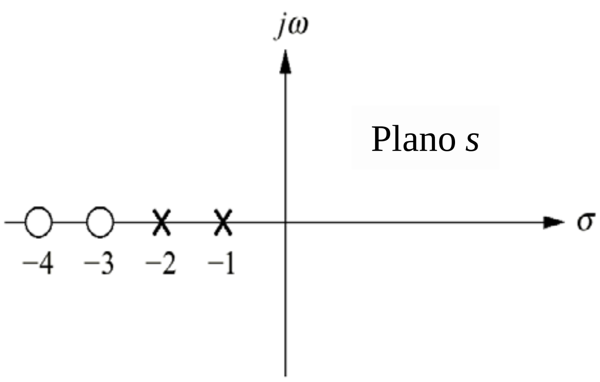
O ponto (-2 + *j*3) pertence ao lugar das raízes? E o ponto (-2 + *j*(√2/2))?

Propriedades Lugar das Raízes

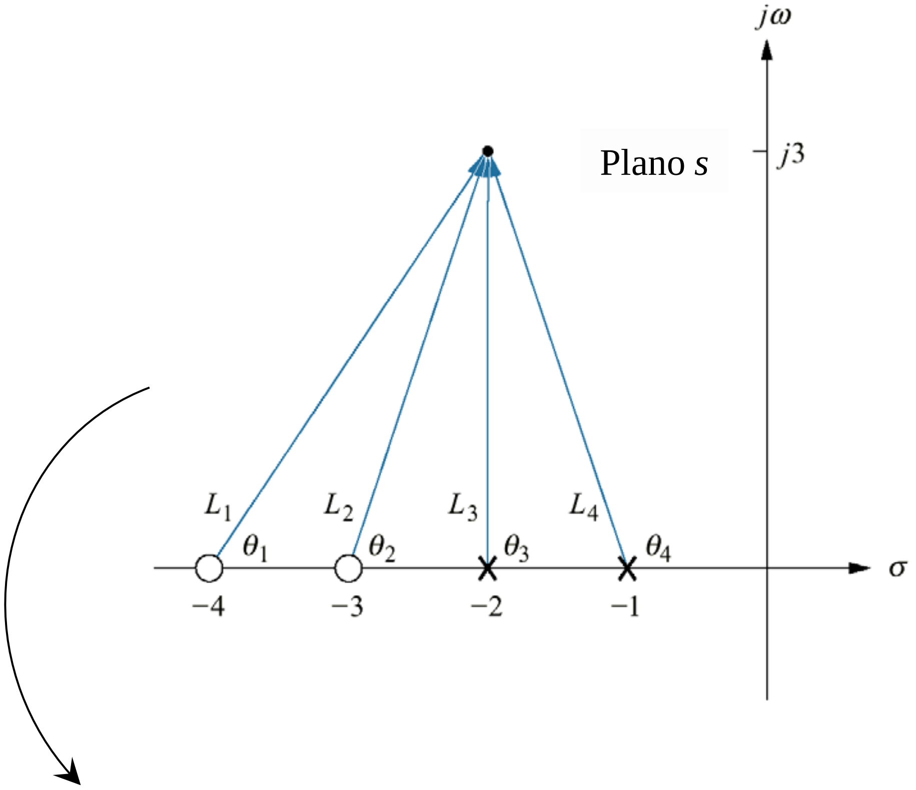
Exemplo:



(a)



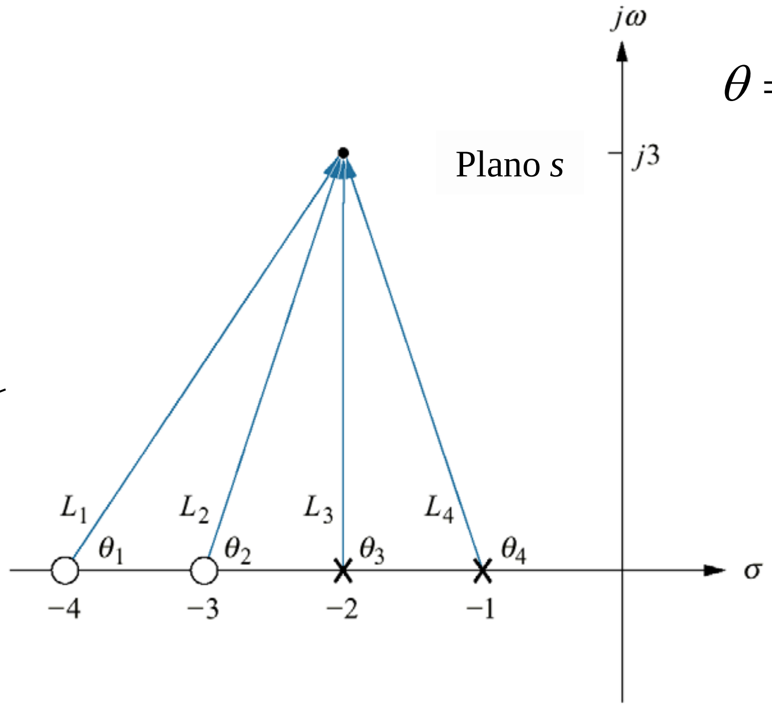
(b)



Representação Vetorial de G(s)

Propriedades Lugar das Raízes

Exemplo:



Representação Vetorial de G(s)

$$\theta = \sum \textit{ângulos dos zeros} - \sum \textit{ângulos dos pólos}$$

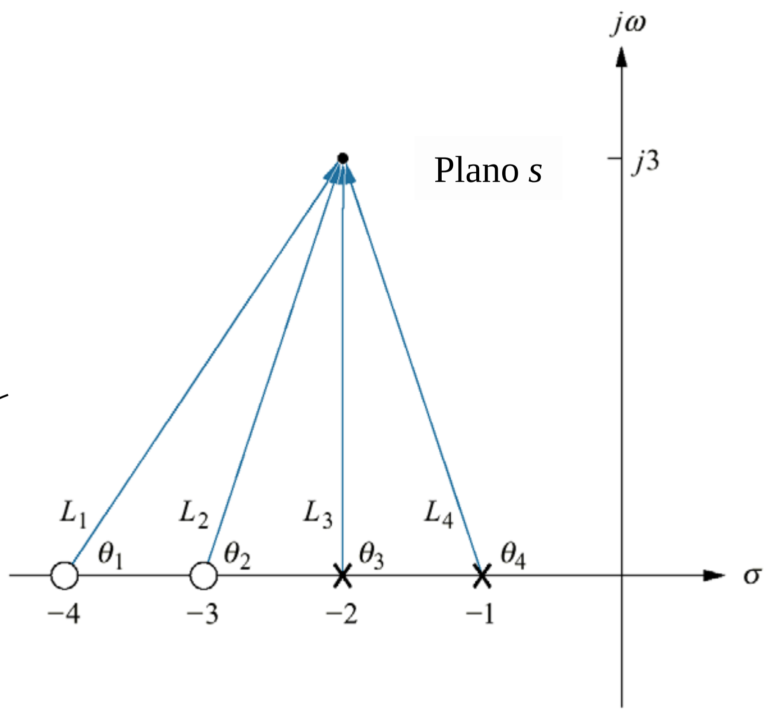
$$\theta = \sum_{i=1}^{m} \angle(s+z_i) - \sum_{j=1}^{n} \angle(s+p_i)$$

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_1 + \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 \\ &= 56.31° + 71.57° - 90° - 108.43° \\ &= -70.55\end{aligned}$$

O ponto (-2 + j3) não pertence ao lugar das raízes, isto é, não representa um polo a malha fechada para nenhum valor de ganho.

Propriedades Lugar das Raízes

Exemplo:



Representação Vetorial de G(s)

Para o ponto (-2 + j(√2/2)), o ângulo vale 180°, e ele pertence ao lugar das raízes, isto é, representa um pólo a malha fechada para algum valor de ganho...

$$M = \frac{\prod comprimentos\ dos\ zeros}{\prod comprimentos\ dos\ pólos} = K\frac{\prod_{i=1}^{m}|(s+z_i)|}{\prod_{j=1}^{n}|(s+p_i)|} = 1$$

$$K = \frac{1}{M} = \frac{\prod comprimentos\ dos\ pólos}{\prod comprimentos\ dos\ zeros}$$

$$K = \frac{L_3L_4}{L_1L_2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(1,22)}{(2,12)(1,22)} = 0,33$$

Cenas do Próximo Capítulo...

- O LR mostra como os polos em malha fechada variam em função de um ou mais parâmetros ajustáveis.

- Traçar o LR direto pelo conceito não é algo prático. Será apresentado um procedimento prático geral que permite o esboço do Gráfico do Lugar das Raízes em função da variação de um dado parâmetro.