PROPRIEDADES DA DISTRIBUIÇÃO NORMAL

Uma variável aleatória contínua X tem distribuição Normal (ou Gaussiana) com parâmetros μ ($-\infty < \mu < \infty$) e σ^2 ($\sigma > 0$) se a sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2\right)}, \quad -\infty < x < \infty \quad \rightarrow \quad X \sim N(\mu, \sigma^2).$$

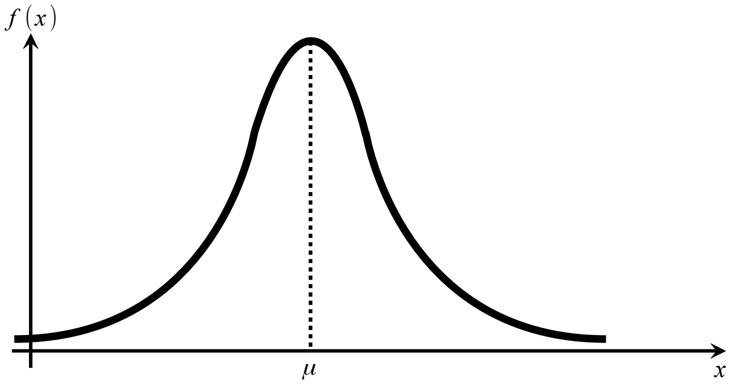

Figura 1 – Gráfico da Distribuição Normal

1. Vamos mostrar que $f(x)$ é uma função densidade de probabilidade. Obviamente, $f(x) \geq 0$ (isso pode ser facilmente percebido analisando-se o gráfico da distribuição, apresentado na Figura 1). Devemos ainda verificar que a sua integral, no intervalo de $-\infty$ a ∞, vale 1. Fazendo $t = (x-\mu)/\sigma$, tem-se:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2\right)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(\frac{-t^2}{2}\right)} dt = I.$$

O artifício empregado para calcular essa integral é calcular I^2:

$$I^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(\frac{-t^2}{2}\right)} dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(\frac{-s^2}{2}\right)} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(\frac{-(s^2+t^2)}{2}\right)} dsdt.$$

Introduzindo coordenadas polares:

$$s = r\cos(\alpha) \qquad t = r\,sen(\alpha).$$

Assim, o elemento de área $dsdt$ se torna $rdrd\alpha$. Como s e t variam entre $-\infty$ e ∞, r varia entre 0 e ∞, enquanto α varia entre 0 e 2π. Portanto,

$$I^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} r e^{\left(\frac{-r^2}{2}\right)} dr d\alpha=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} -e^{\left(\frac{-r^2}{2}\right)}\Bigg|_0^{\infty} d\alpha=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\alpha=1.$$

Assim, $I = 1$, como se queria mostrar.

2. Vamos examinar o aspecto do gráfico de $f(x)$. Ele apresenta a bem conhecida forma de sino, mostrada na Figura 1. Visto que $f(x)$ depende de x somente por meio da expressão $(x–\mu^2)$, torna-se evidente que o gráfico de $f(x)$ será simétrico em relação μ. O parâmetro σ também pode ser interpretado geometricamente: para $x = \mu$, o gráfico de $f(x)$ é descendente, de concavidade para baixo. Quando $x \to \pm\infty$, $f(x) \to 0$, assintoticamente. Visto que $f(x) \geq 0$ para todo x, isso significa que, para valores grandes de x (positivos ou negativos), o gráfico de $f(x)$ tem a concavidade para cima. O ponto no qual a concavidade muda é denominado ponto de inflexão, e será localizado pela resolução da equação $f''(x) = 0$. Ao fazer isso, verificamos que os pontos de inflexão ocorrem para $x = \mu \pm \sigma$. Portanto, se σ for relativamente grande, o gráfico de $f(x)$ tende a ser "achatado", enquanto se σ for pequeno, o gráfico tende a ser bastante "pontiagudo".

3. Em complemento à interpretação geométrica dos parâmetros μ e σ, o seguinte significado probabilístico pode ser associado a essas quantidades. Consideremos

$$E(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x e^{\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2\right)} dx.$$

Fazendo-se $z = (x - \mu)/\sigma$, tem-se:

$$E(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma z+\mu) e^{\left(-\frac{z^2}{2}\right)} dz=\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sigma\int_{-\infty}^{\infty} z e^{\left(-\frac{z^2}{2}\right)} dz}_{I}+\mu\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-\frac{z^2}{2}\right)} dz}_{II}=\mu.$$

O termo I vale 0, pois o integrando $g(z)$ é uma função ímpar (possui a propriedade $g(z) = -g(-z)$). O termo II representa a área total sobre a fdp Normal e, por isso, é igual à unidade e, portanto, $E(X) = \mu$.

Consideremos agora

$$E(X^2)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2\right)} dx.$$

Fazendo-se, novamente, $z = (x - \mu)/\sigma$, tem-se:

$$\begin{aligned}E(X^2)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma z+\mu)^2 e^{\left(-\frac{z^2}{2}\right)} dz\\&=\sigma^2\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{\left(-\frac{z^2}{2}\right)} dz}_{I}+2\mu\sigma\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} z e^{\left(-\frac{z^2}{2}\right)} dz}_{II}+\mu^2\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-\frac{z^2}{2}\right)} dz}_{III}.\end{aligned}$$

O termo *II* vale 0, pois o integrando $g(z)$ é uma função ímpar (possui a propriedade $g(z) = -g(-z)$). O termo *III* representa a área total sobre a fdp Normal e, por isso, é igual à unidade. Para calcular o termo *I*, utiliza-se integração por partes:

$$z\,e^{\left(-\frac{z^2}{2}\right)} = dv \qquad z = u \;\rightarrow\; v = -e^{\left(-\frac{z^2}{2}\right)} \qquad dz = du$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{\left(-\frac{z^2}{2}\right)} dz = \left.\frac{-z\,e^{\left(-\frac{z^2}{2}\right)}}{\sqrt{(2\pi)}}\right|_{-\infty}^{\infty} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-\frac{z^2}{2}\right)} dz}_{IV} = 0 + 1 = 1$$

O termo *IV* representa a área total sobre a fdp Normal e, por isso, é igual à unidade.

Logo,

$$E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2.$$

Portanto,

$$Var(X) = E(X^2) - \mu^2 = (\sigma^2 + \mu^2) - \mu^2 = \sigma^2.$$

Resumindo:

- Os parâmetros μ e σ^2, que caracterizam a distribuição Normal, são a média e a variância, respectivamente.