Estatística Básica

Probabilidade

Renato Dourado Maia

Instituto de Ciências Agrárias

Universidade Federal de Minas Gerais

Probabilidade Condicional

- Dados dois eventos A e B, a probabilidade condicional de A, dado que B ocorreu, é representada por $P(A|B)$ e dada por:

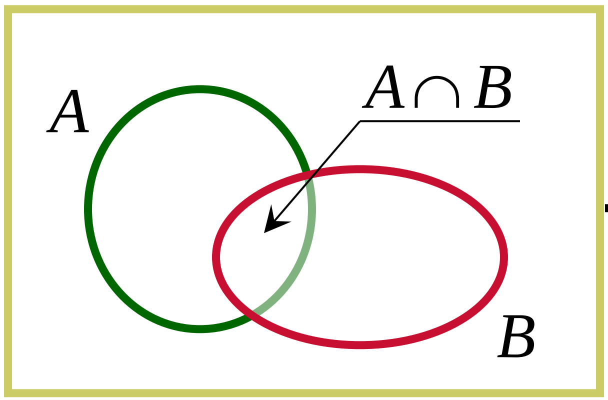
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \; P(B) > 0$$

$\downarrow$

Interpretação?

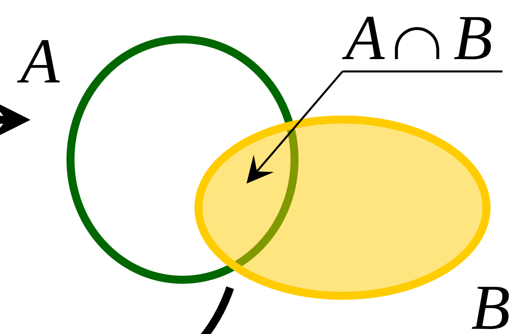
Diagrama de Venn...

Probabilidade Condicional



→ Espaço Amostral

Na probabilidade condicional, B faz o papel do espaço amostral! →



$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},\ P(B) > 0$$

Independência de Eventos

- Dois eventos A e B são independentes se a informação da ocorrência ou não de B não altera a probabilidade de ocorrência de A.

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A), \; P(B) > 0$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Naturalmente, se A é independente de B, B é independente de A...

Exemplo da Aula Passada...

- Um levantamento estatístico, efetuado em certa população, estudou a hipertensão em 450 casais e observou que 148 indivíduos do sexo masculino e 122 do sexo feminino eram hipertensos. Observou-se também que em 47 casais ambos (homem e mulher) eram hipertensos. Qual é a probabilidade de que a mulher seja hipertensa, em um casal onde o homem é hipertenso?

$$Evento\ A = Homem\ hipertenso \therefore Evento\ B = Mulher\ hipertensa$$

O que devemos calcular? $\longrightarrow P(B|A)$

Exemplo da Aula Passada...

$P(A \cap B)$ $\quad$ $P\left(A \cap \overline{B}\right)$

$P(A) = 0,33$

$P(B) = 0,27$

	Mulher		**Total**
Homem	Sim	Não	
Sim	0,10	0,23	**0,33**
Não	0,17	0,50	0,67
Total	**0,27**	0,73	1,00

Probabilidades Marginais

$P\left(\overline{A} \cap B\right)$

Probabilidades Marginais

$P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,10}{0,33} = 0,30$$

Exemplo 1

- Uma empresa produz peças em duas máquinas, *I* e *II*, que podem apresentar desajustes com probabilidade 0,05 e 0,10, respectivamente. No início do dia de operação, um teste é realizado e, caso a máquina esteja fora de ajuste, ela ficará sem operar nesse dia, passando por revisão técnica. Para cumprir o nível mínimo de produção, pelo menos uma das máquinas deve operar. Você diria que a empresa corre o risco de não cumprir as suas metas de produção?

Exemplo 1

- Considerações:

  1) O_i *é o evento da máquina i* $(i = 1,2)$ *estar operando.*

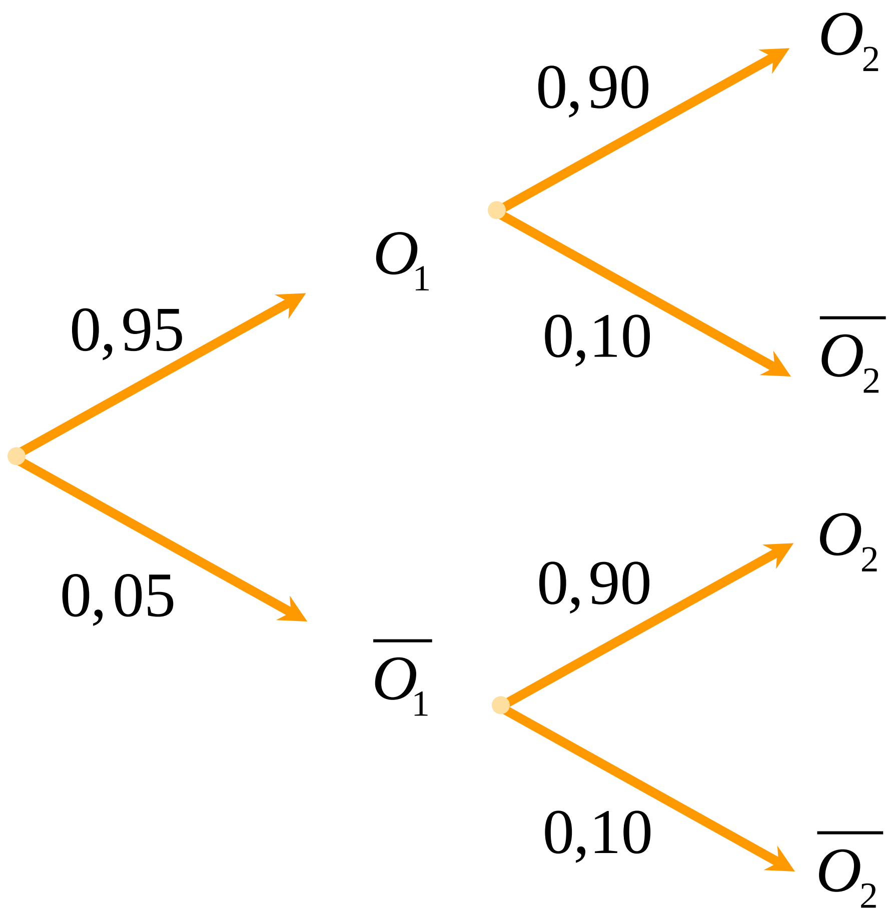
  2) O_1 *é independente de* O_2.

  3) *Vamos escrever* O_1O_2 *para o evento* $O_1 \cap O_2$.

Sabe-se que: $P(O_1) = 0,95$ *e* $P(O_2) = 0,90$

O₁ e *O₂* são independentes?

Exemplo 1 – Árvore de Probabilidades



$$P(O_1O_2) = 0,95 \cdot 0,90 = 0,855$$

$$P(O_1\overline{O_2}) = 0,95 \cdot 0,10 = 0,095$$

$$P(\overline{O_1}O_2) = 0,05 \cdot 0,90 = 0,045$$

$$P(\overline{O_1}\,\overline{O_2}) = 0,05 \cdot 0,10 = 0,005$$

Exemplo 1

- Lembrando: para cumprir o nível mínimo de produção, pelo menos uma das máquinas deve operar.

Evento	Probabilidade
O_1O_2	0,855
$O_1\overline{O_2}$	0,095
$\overline{O_1}O_2$	0,045
$\overline{O_1}\,\overline{O_2}$	0,005

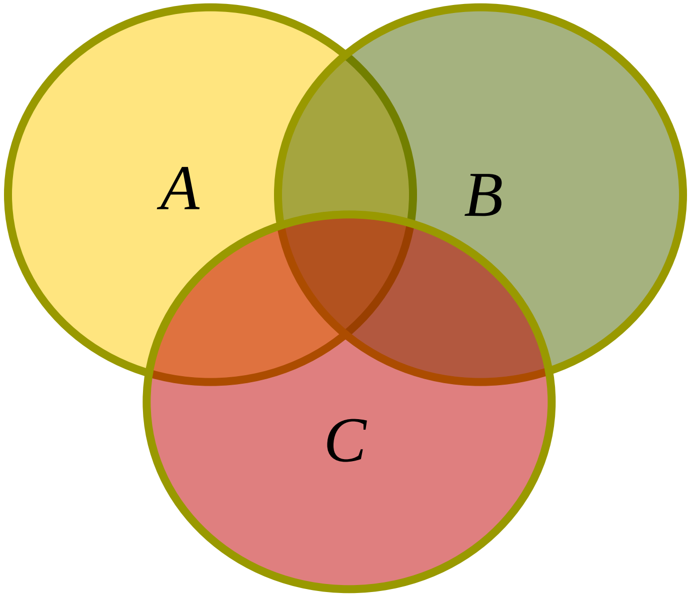
Qual é o evento de interesse? $\longrightarrow O_1O_2 \cup O_1\overline{O_2} \cup \overline{O_1}O_2$

$$P(O_1O_2 \cup O_1\overline{O_2} \cup \overline{O_1}O_2) = P(O_1O_2) + P(O_1\overline{O_2}) + P(\overline{O_1}O_2) = 0,995$$

Exemplo 1

$$P(O_1O_2 \cup O_1\overline{O_2} \cup \overline{O_1}O_2) = P(O_1O_2) + P(O_1\overline{O_2}) + P(\overline{O_1}O_2) = 0,995$$

Quem não estiver dormindo pode estar com a seguinte dúvida: e as interseções?



$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

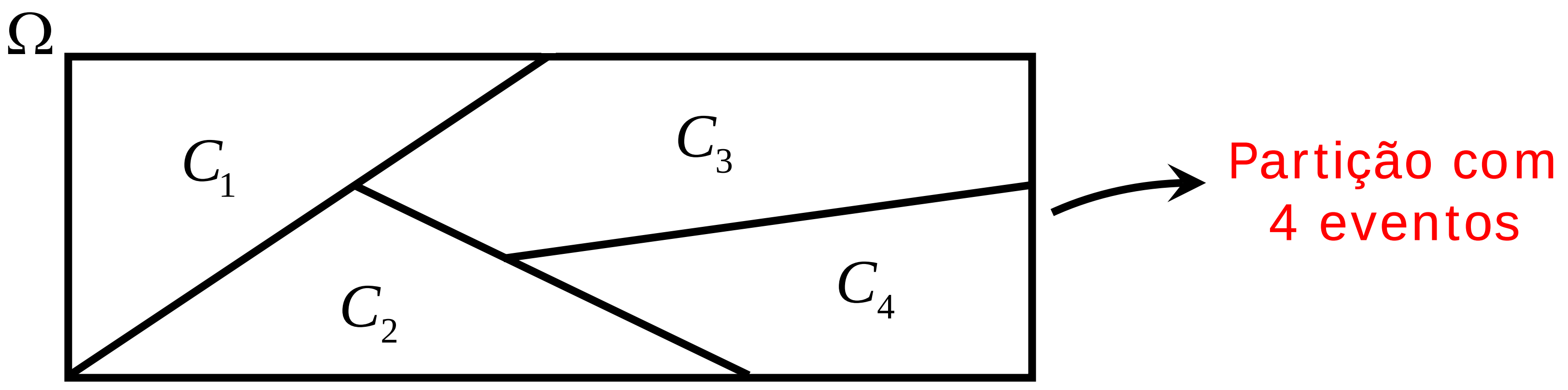
$$\Big\downarrow \text{Eventos Disjuntos}$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

Partição do Espaço Amostral

- Os eventos C_1, C_2, ..., C_k formam uma partição do espaço amostral se eles não têm interseção entre si (são disjuntos) e se sua união é igual ao espaço amostral, isto é:

$$C_i \cap C_j = \varnothing,\ para\ i \neq j\ e \bigcup_{i=1}^{k} C_i = \Omega$$



Exemplo 2

- Suponha que um fabricante de sorvete recebe 20% do leite que utiliza de uma fazenda F_1, 30% de F_2, e 50% de F_3. Um órgão de fiscalização inspecionou as fazendas de surpresa, e observou que 20% do leite produzido por F_1 estava adulterado por adição de água, enquanto que, para F_2 e F_3, essa proporção era de 5% e 2%, respectivamente. Na indústria de sorvete, os galões de leite são armazenados em um refrigerador, sem identificação das fazendas. Para um galão escolhido ao acaso, qual é a probabilidade de ele conter leite adulterado?

Exemplo 2

- Considerações:

  1) A *é o evento "o leite está adulterado".*

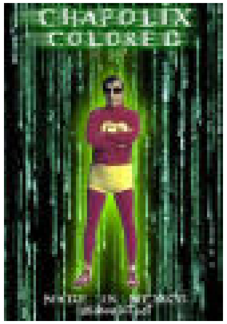
  2) $P(A \mid F_1) = 0{,}20.$

  3) $P(A \mid F_2) = 0{,}05.$

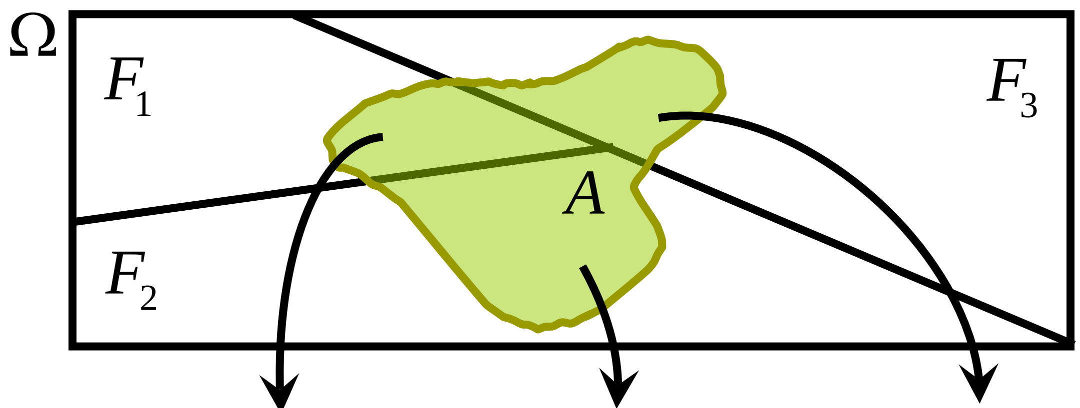
  4) $P(A \mid F_3) = 0{,}02.$

  5) $F_1,\ F_2$ *e* F_3 *formam uma partição do espaço amostral.*

E agora, quem poderá nos ajudar?



Exemplo 2



$$A = (A \cap F_1) \cup P(A \cap F_2) \cup P(A \cap F_3)$$

Pensemos agora no seguinte problema: sabendo-se que o leite foi adulterado, qual é a probabilidade de que a amostra tenha sido obtida do leite fornecido pela fazenda F_1?

$$P(F_1 \mid A) = \frac{P(A \cap F_1)}{P(A)}$$

Exemplo 2

$$\begin{cases} P(A|F_1) = \dfrac{P(A\cap F_1)}{P(F_1)} \therefore P(A\cap F_1) = P(A|F_1)\cdot P(F_1) \\ P(A|F_2) = \dfrac{P(A\cap F_2)}{P(F_2)} \therefore P(A\cap F_2) = P(A|F_2)\cdot P(F_2) \\ P(A|F_3) = \dfrac{P(A\cap F_3)}{P(F_3)} \therefore P(A\cap F_3) = P(A|F_3)\cdot P(F_3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = (A\cap F_1) \cup P(A\cap F_2) \cup P(A\cap F_3)$$

$$P(F_1 | A) = \frac{P(A\cap F_1)}{P(A)} = \frac{P(A|F_1)\cdot P(F_1)}{P(A|F_1)\cdot P(F_1) + P(A|F_2)\cdot P(F_2) + P(A|F_3)\cdot P(F_3)}$$

Pergunta...

O resultado que encontramos para o exemplo 2 pode ser generalizado?

Teorema de Bayes

- Suponha que eventos $C_1, C_2, \ldots, C_k$ formem uma partição do espaço amostral, e que suas probabilidades sejam conhecidas. Suponha, ainda, que, para um evento A, sejam conhecidas as probabilidades $P(A|C_i)$, para todo $i = 1, 2, \ldots, k$. Então, para qualquer j,

$$P(C_j \mid A) = \frac{P(A|C_j)P(C_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(A|C_i)P(C_i)}, \; j = 1,\; 2, \cdots, \; k$$

Bayes: o “cara”

- Na página da disciplina, na seção Materiais Complementares, está disponível um artigo intitulado “Bayes: o “cara””, publicado na revista Ciência Hoje (vol. 38, núm. 228, julho de 2006). O texto é curto, simples e introdutório, e a sua leitura é muito recomendada! ☺

Por hoje é só! Diga tchau, Lilica!

TERCEIRA LISTA DE EXERCÍCIOS SUGERIDOS!!!