

Estatística Básica

Probabilidade

Renato Dourado Maia

Instituto de Ciências Agrárias

Universidade Federal de Minas Gerais

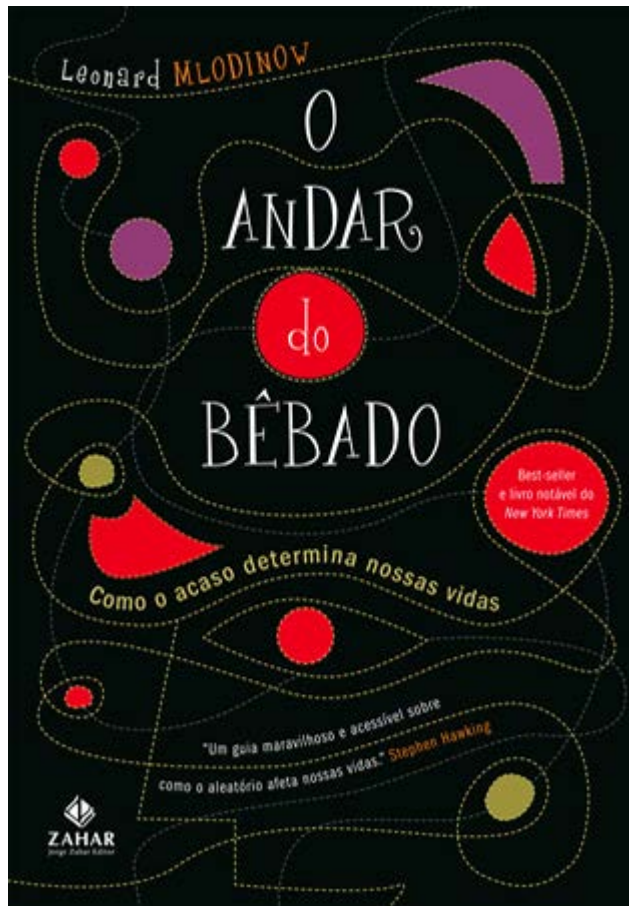


Lembrando...

O que é Probabilidade?



Leitura Recomendada



Na página da disciplina há uma resenha sobre o livro, que foi publicada no jornal "O Estado de São Paulo", além de um trecho do livro, disponibilizado no *site* da editora Zahar.

Modelos Matemáticos

□ Determinístico:

- O resultado efetivo, numérico ou de outra espécie, é **determinado** pelas condições sobre as quais o experimento ou procedimento é executado.

□ Não-Determinístico, Probabilístico ou Estocástico:

- As condições do experimento **determinam apenas o comportamento probabilístico** do resultado observável.

MAS O QUE É UM EXPERIMENTO?

Experimento

- Um experimento é um procedimento que pode ser repetido **sob as mesmas condições de contorno**, que pretende observar **quantitativamente** uma ou mais **variáveis** associadas a um **fenômeno**.



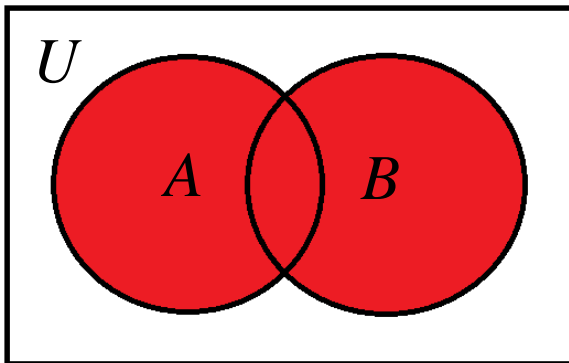
Conjuntos

- ❑ Um **Conjunto** é uma coleção de objetos, chamados de membros ou elementos. Normalmente, é representado por uma letra maiúscula.
- ❑ O **Conjunto Fundamental**, também chamado de **Universo**, é aquele que contém **todos** os objetos que estão sendo estudados. Normalmente, é denotado pela letra U .
- ❑ O **Conjunto Vazio** ou **Nulo** é aquele que não contém nenhum elemento e, normalmente, é denotado pelo símbolo \emptyset .

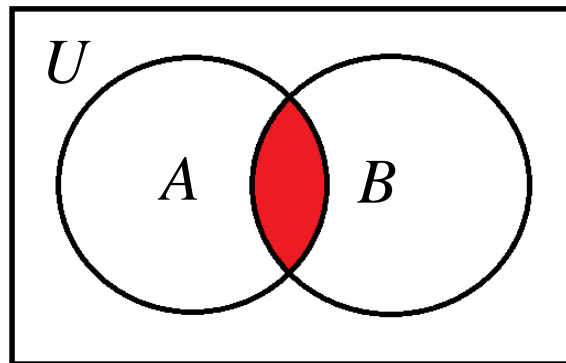
Conjuntos

- Outros conceitos a serem lembrados: **união** (ou soma), **interseção** (ou produto), **complemento**, e as propriedades das operações de **combinação de conjuntos**... Estudem!!!

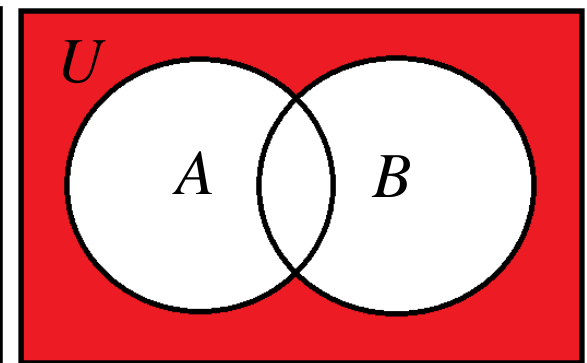
Diagramas de Venn



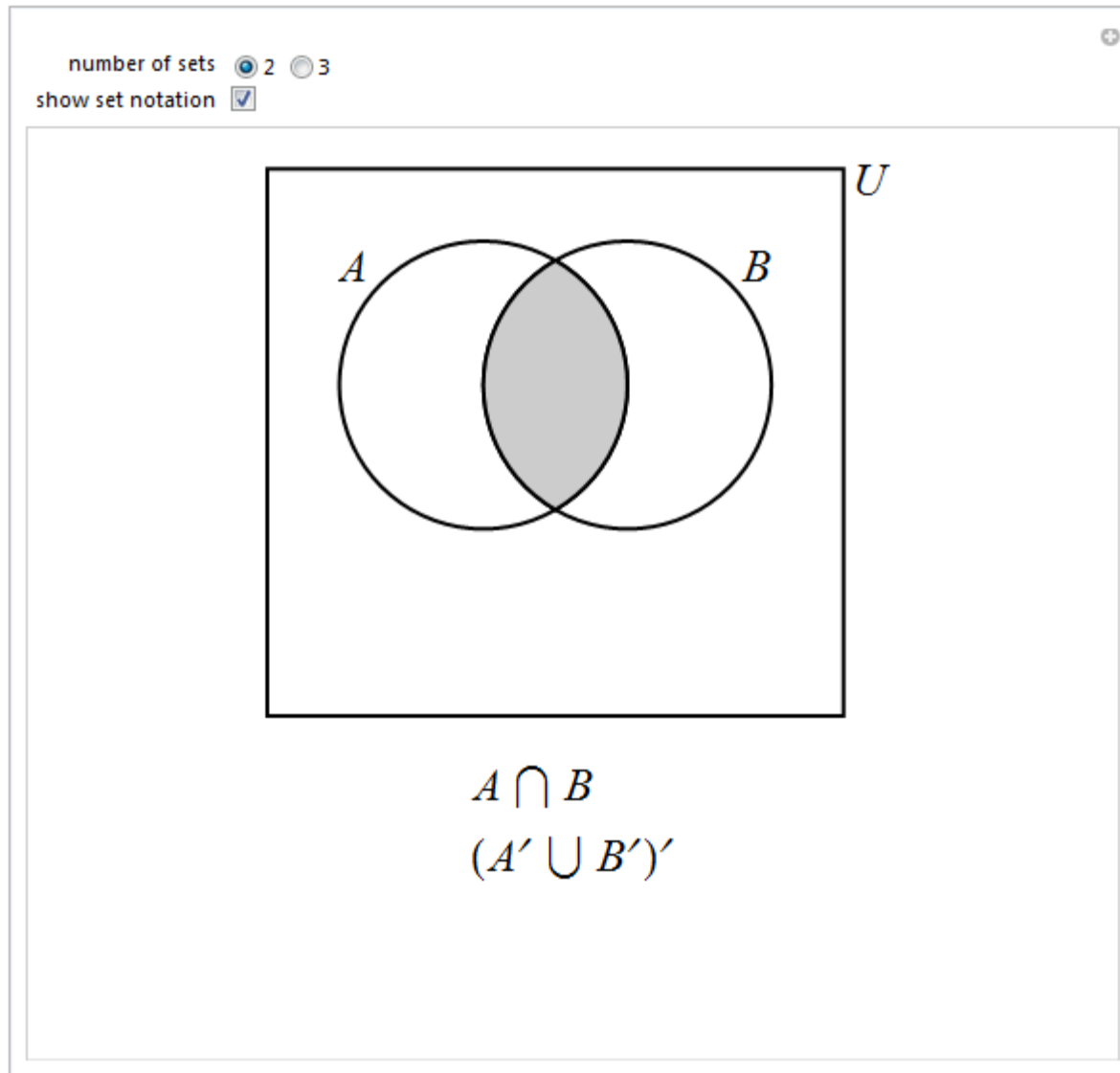
$$A \cup B$$



$$A \cap B$$



$$\overline{A \cup B} = (A \cup B)^c$$



"Interactive Venn Diagrams" from the Wolfram Demonstrations Project

<http://demonstrations.wolfram.com/InteractiveVennDiagrams/>

Experimento Aleatório

- Um experimento **aleatório** ou **não-determinístico** é aquele que tem um modelo não-determinístico apropriado associado. Aspectos importantes:
 - Cada experimento poderá ser **repetido indefinidamente** sob **condições inalteradas**.
 - Não se pode afirmar **qual resultado particular ocorrerá**, mas se pode descrever **o conjunto de todos os possíveis resultados do experimento**.
 - Quando o experimento for executado repetidamente, os resultados individuais **parecerão ocorrer de forma acidental**. Contudo, **quando o número de repetições for grande**, surgirá **regularidade**, o que torna possível a construção de um modelo não-determinístico.

Espaço Amostral e Evento

- O **Espaço Amostral** é o conjunto de **todos** os resultados possíveis de um experimento. É importante destacar a relação entre **idealização matemática** e **realização experimental**. Normalmente é denotado pela letra S . Pode ser **finito**, **infinito enumerável**, ou **infinito não-enumerável**.
- Um **Evento** é um subconjunto do Espaço Amostral.

Frequência Relativa

- A **Frequência Relativa** de um evento associado a um experimento é dada pela relação entre o número de ocorrências do evento (**Frequência Absoluta ou Frequência**) e o número de realizações do experimento:

$$f_a = \frac{n_a}{n}$$

f_a → Frequência Relativa do evento A

n_a → Frequência do evento A

n → Número de realizações do experimento

Regularidade Estatística

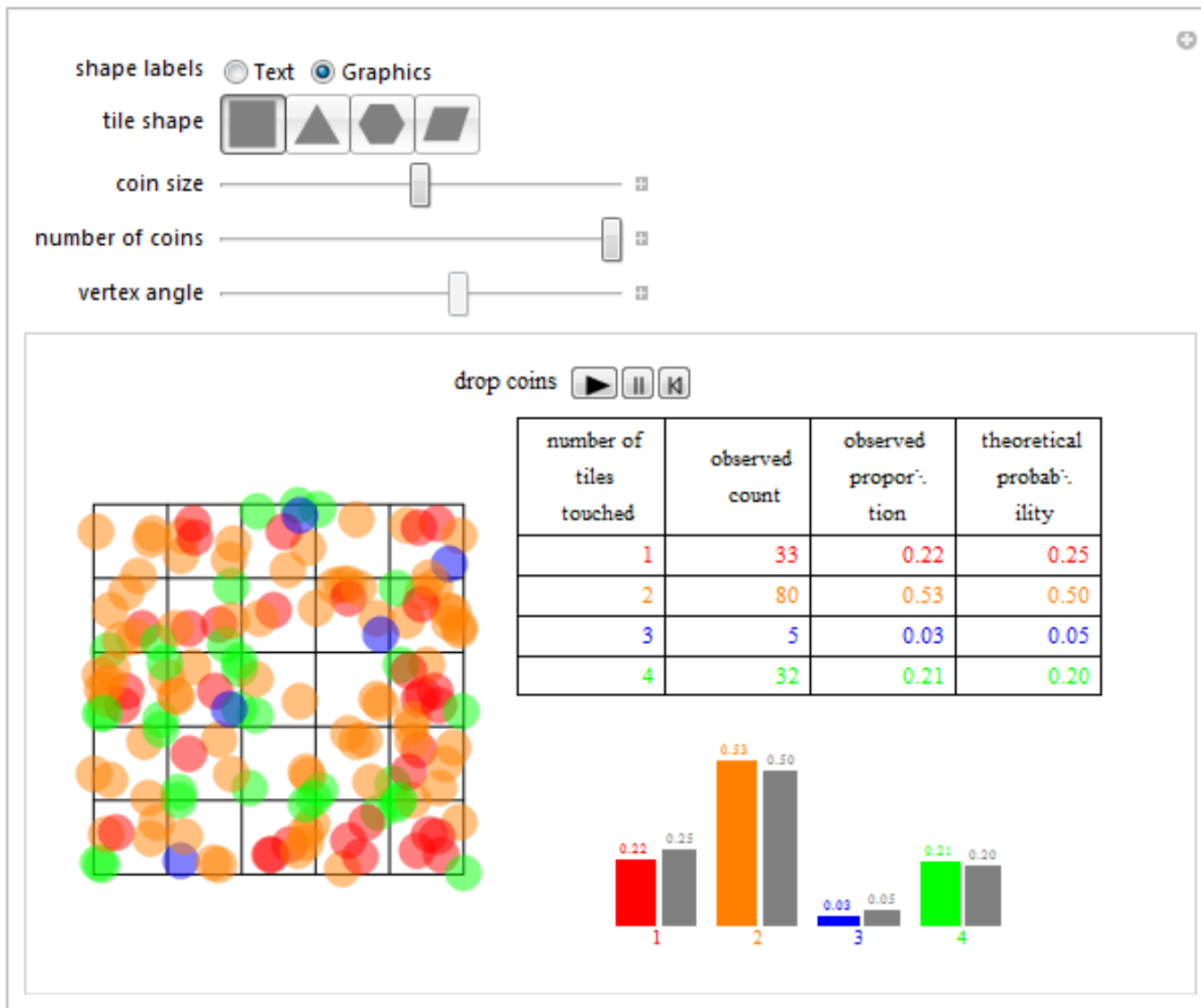
- Se um experimento for executado **um grande número de vezes**, a frequência relativa da ocorrência de algum evento A **tenderá a variar cada vez menos**, à medida que o número de repetições for **aumentado**.

 **Regularidade Estatística**

Regularidade Estatística

- Vamos observar o fenômeno da **Regularidade Estatística** por meio da simulação do lançamento de um dado honesto no R...
 - `x <- 1:6`
 - `NumJogadas = 10`
 - `Amostra = sample(x, NumJogadas, rep = TRUE)`
 - `Tabela <- table(Amostra)`

Bonito demais! Delícia crocante!

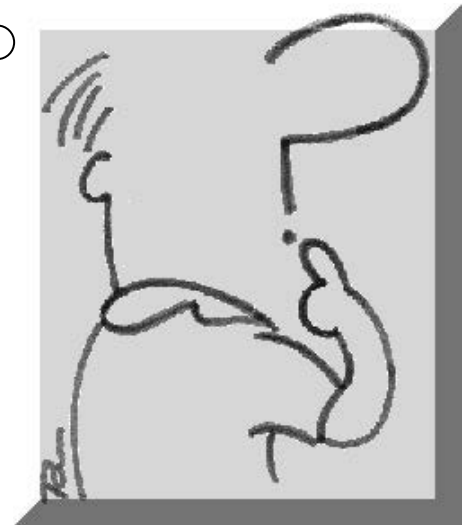


"Clean Tile Problem" from the Wolfram Demonstrations Project

<http://demonstrations.wolfram.com/CleanTileProblem/>

Perguntas...

Como atribuir probabilidades aos elementos do espaço amostral? Aliás, o que a probabilidade de um evento representa?



Respostas

- A **probabilidade** de um evento A é um número que diz **o quão verossímil será a ocorrência do evento** quando o experimento for realizado.
- Uma maneira de se determinar esse número é repetir o experimento **um grande número de vezes**, calcular a frequência relativa, e utilizar esse resultado. **Mas o que seria um grande número de vezes?**
- Outra maneira é considerar as **características teóricas** do experimento.

Probabilidade

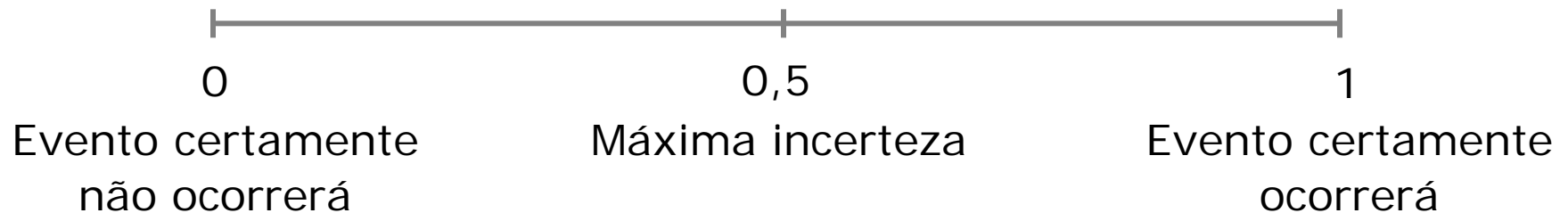
□ Uma função $P(\cdot)$ é denominada probabilidade se:

1) $0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \subset S$

2) $P(S) = 1$

3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

4) $P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n P(A_j),$ com os A_j 's *disjuntos*



A Porta dos Desesperados



Você trocaria de porta, meu gluglu?

A Porta dos Desesperados

O Problema de Monty Hall (trecho do seriado Numb3rs)

<http://www.youtube.com/watch?v=P9WFKmLK0dc>

O Problema de Monty Hall (por Ron Clarke)

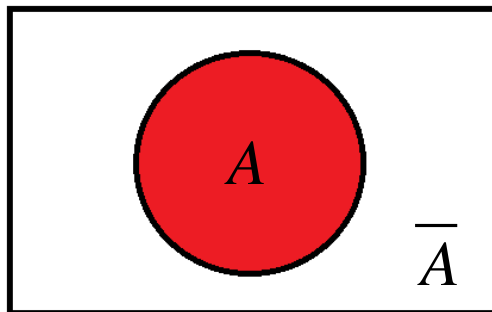
<http://www.youtube.com/watch?v=mhlc7peGIGg>

Exemplo 1

- Um médico sabe que um procedimento cirúrgico apresenta 80% de resultados **plenamente adequados**. Qual é a probabilidade de que a aplicação desse procedimento **resulte em complicações**?

Evento $A = \text{Complicações} \therefore \text{Evento } \bar{A} = \text{Sucesso (complementar de } A)$

U



$$\begin{aligned} A \cup \bar{A} &= U \rightarrow P(A \cup \bar{A}) = P(U) = 1 \\ \rightarrow P(A) + P(\bar{A}) &= 1 \rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A}) \\ P(A) &= 1 - 0,8 = 0,2 \text{ (20\%)} \end{aligned}$$

Exemplo 2

- Um levantamento estatístico, efetuado em certa população, estudou a hipertensão em 450 casais e observou que 148 indivíduos do sexo masculino e 122 do sexo feminino eram hipertensos. Observou-se também que em 47 casais ambos (homem e mulher) eram hipertensos. Sorteando-se um casal dessa população, qual é a probabilidade de que o homem ou a mulher sejam hipertensos?

Evento A = Homem hipertenso ∴ Evento B = Mulher hipertensa



$$P(A) = 148/450 = 0,33$$



$$P(B) = 122/450 = 0,27$$

Exemplo 2

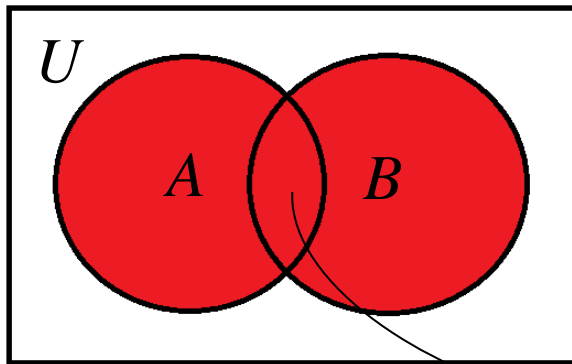
Evento $A =$ Homem hipertenso \therefore Evento $B =$ Mulher hipertensa

↓

$$P(A) = 148/450 = 0,33$$

↓

$$P(B) = 122/450 = 0,27$$



$$A \cup B = A + B - A \cap B$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,50$$

OK OK ?



$$P(A \cap B) = \frac{47}{450} = 0,10$$

$A \cup B$ (A ou B)

Mulher ou homem
com hipertensão

$A \cap B$ (A e B)

Mulher e homem
com hipertensão

Exemplo 2

	Mulher			
	Sim	Não	Total	
Homem				
Sim	0,10	0,23	0,33	} Probabilidades Marginais
Não	0,17	0,50	0,67	
Total	0,27	0,73	1,00	

} Probabilidades Marginais

$P(A) = 0,33$
 $P(B) = 0,27$

Qual é a probabilidade de que pelo menos um no casal seja hipertenso ($P(A \cup B)$)?

Espaços Amostrais Finitos

- Um **Espaço Amostral Finito** é aquele que possui n elementos. Existem $n!$ maneiras de se listar esses elementos (**permutação**).
- Considerando-se a hipótese de **resultados igualmente verossímeis**, que tem relação com a maneira como o experimento é realizado:

$$P(A) = \frac{\textit{n}^\circ \textit{ de maneiras pelas quais o evento A pode ocorrer}}{\textit{n}^\circ \textit{ de maneiras pelas quais o experimento pode ocorrer}} = \frac{r}{k}$$

Efeito da maneira como o experimento é realizado?

Espaços Amostrais Finitos

- Para calcular o número de maneiras pelas quais o evento A pode ocorrer, e o número de maneiras pelas quais o experimento pode ocorrer, são utilizados métodos sistemáticos de contagem e enumeração: regra da multiplicação (e), regra da adição (ou), arranjo, permutação, combinação e, **essencialmente**, raciocínio! 😊

Praticaremos o raciocínio com exercícios!!!

Espaços Amostrais Finitos

- Considere que existem x caminhos da minha casa para a casa da minha sogra, y caminhos da casa de minha sogra para o Max-Min e z caminhos da minha casa para o Max-Min:
 - De quantas maneiras posso sair de minha casa e ir para o Max-Min, passando pela casa da minha sogra? Pela **Regra da Multiplicação** (e), existem xy caminhos.
 - De quantas maneiras posso sair de minha casa e ir para o Max-Min ou para a casa da minha sogra? Pela **Regra da Adição** (ou), existem $x + z$ caminhos.

Tranquilo?

Espaços Amostrais Finitos

- Arranjo de n elementos tomados r a r : $A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$
- Permutação de n elementos: $n!$
- Combinação de n elementos tomados r a r :

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r} \rightarrow \text{Coeficientes Binomiais, pois aparecem no desenvolvimento da expressão binomial } (a+b)^n$$

Duas Propriedades: 1) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ 2) $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$

Exercício Interessante: “deduzir” essas propriedades!

Espaços Amostrais Finitos

- Para o contexto em que estamos, n é inteiro e positivo, e $0 \leq r \leq n$. Mas é importante destacar que o coeficiente binomial pode ser definido de uma forma mais geral.

Por enquanto, isso é tudo, pessoal!



SEGUNDA LISTA DE EXERCÍCIOS SUGERIDOS!!!