Estatística Básica

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS

Renato Dourado Maia
Instituto de Ciências Agrárias
Universidade Federal de Minas Gerais

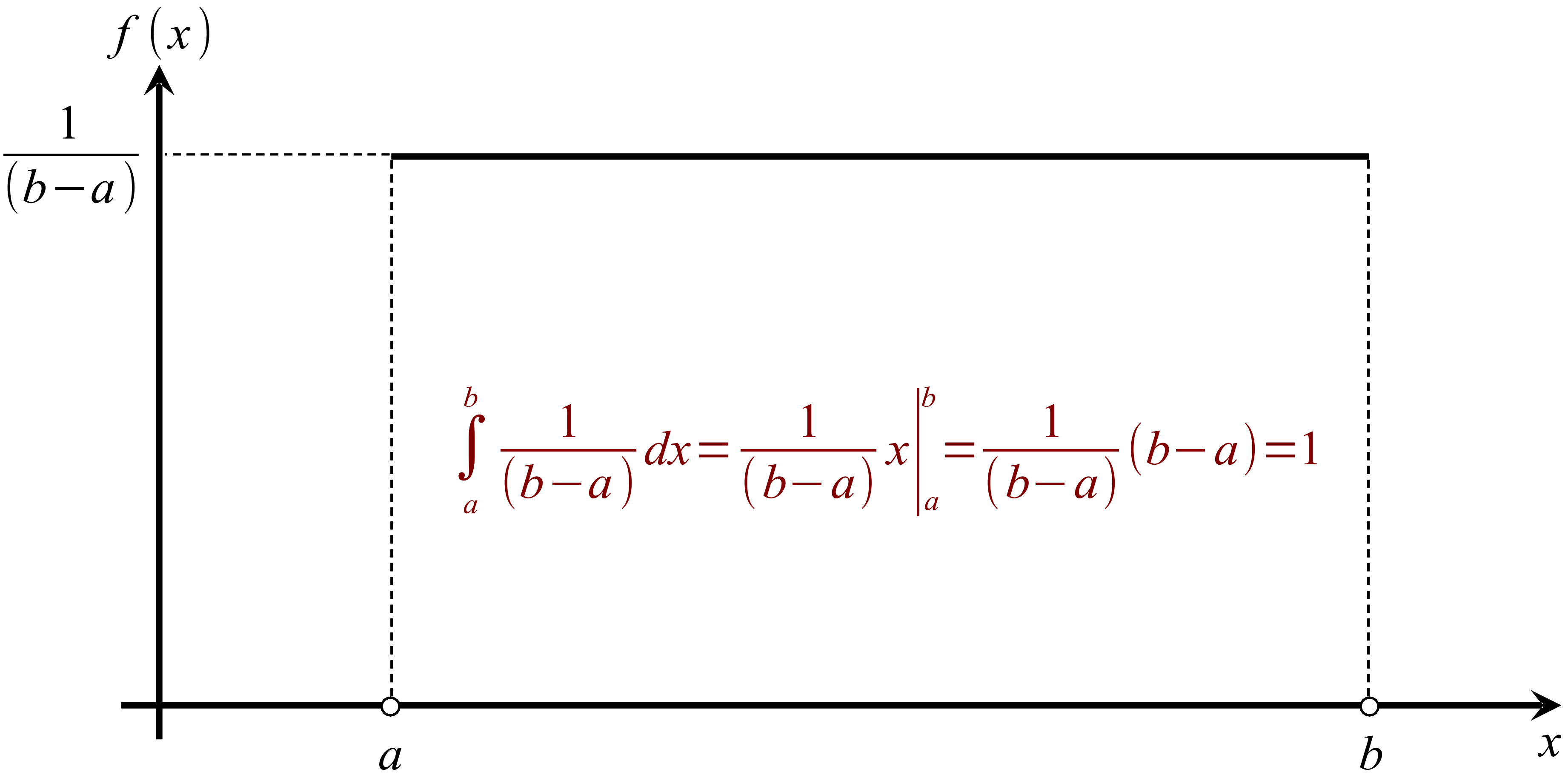
Modelo Uniforme Contínuo

- Uma variável aleatória X tem distribuição **Uniforme** Contínua no intervalo $[a, b]$, $a < b$, se a sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)}, & a \leq x \leq b; \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases} \rightarrow X \sim U[a, b]$$

Essa função pode ser uma função densidade de probabilidade?

Modelo Uniforme Contínuo



$$\int_a^b \frac{1}{(b-a)}\,dx = \frac{1}{(b-a)}\,x\Big|_a^b = \frac{1}{(b-a)}(b-a) = 1$$

Modelo Uniforme Contínuo

$$E(X)=\mu=\int_a^b x\frac{1}{(b-a)}dx=\frac{1}{(b-a)}\left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}$$

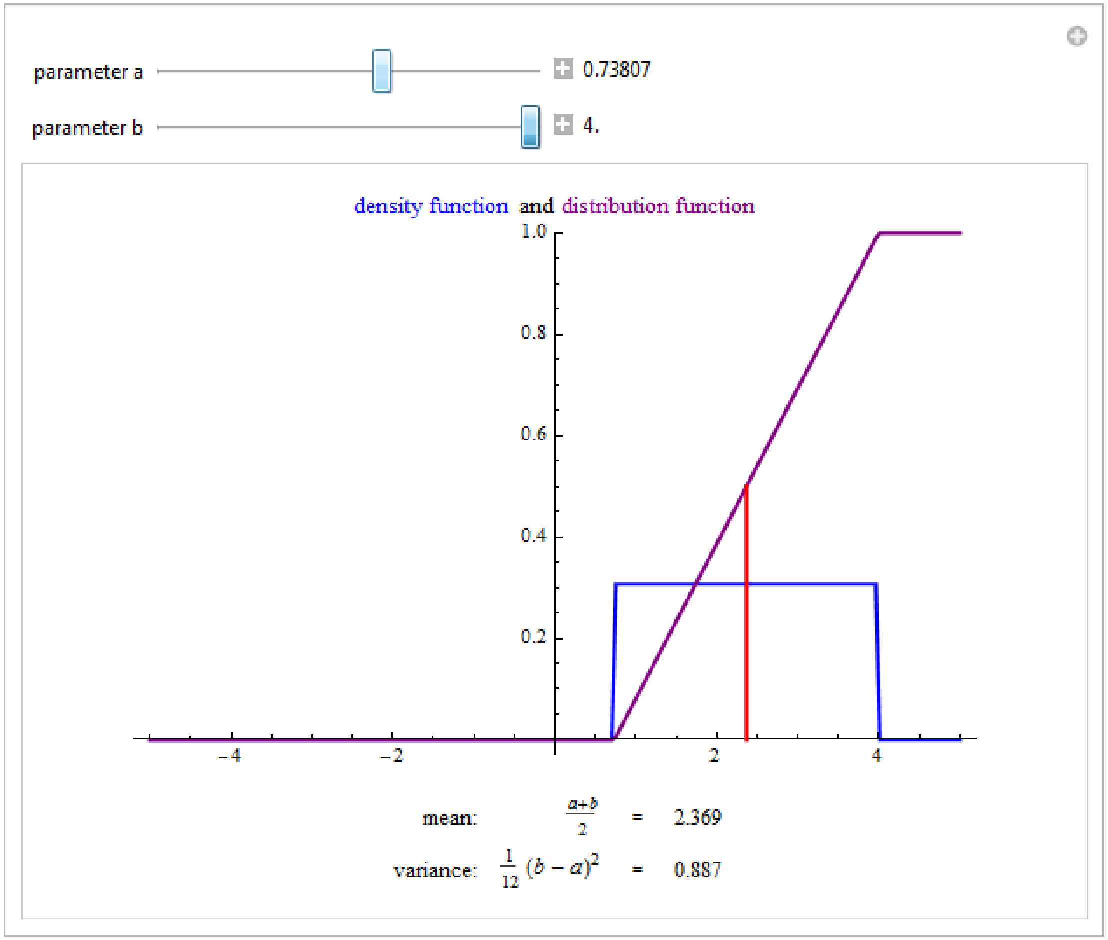
$$E(X^2)=\int_a^b x^2\frac{1}{(b-a)}dx=\frac{1}{(b-a)}\left.\frac{x^3}{3}\right|_a^b=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma^2=E(X^2)-\mu^2=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12}$$

"The Continuous Uniform Distribution" from the Wolfram Demonstrations Project

http://demonstrations.wolfram.com/TheContinuousUniformDistribution/

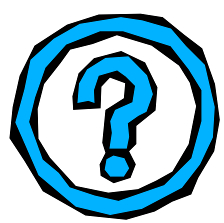


Modelo Exponencial

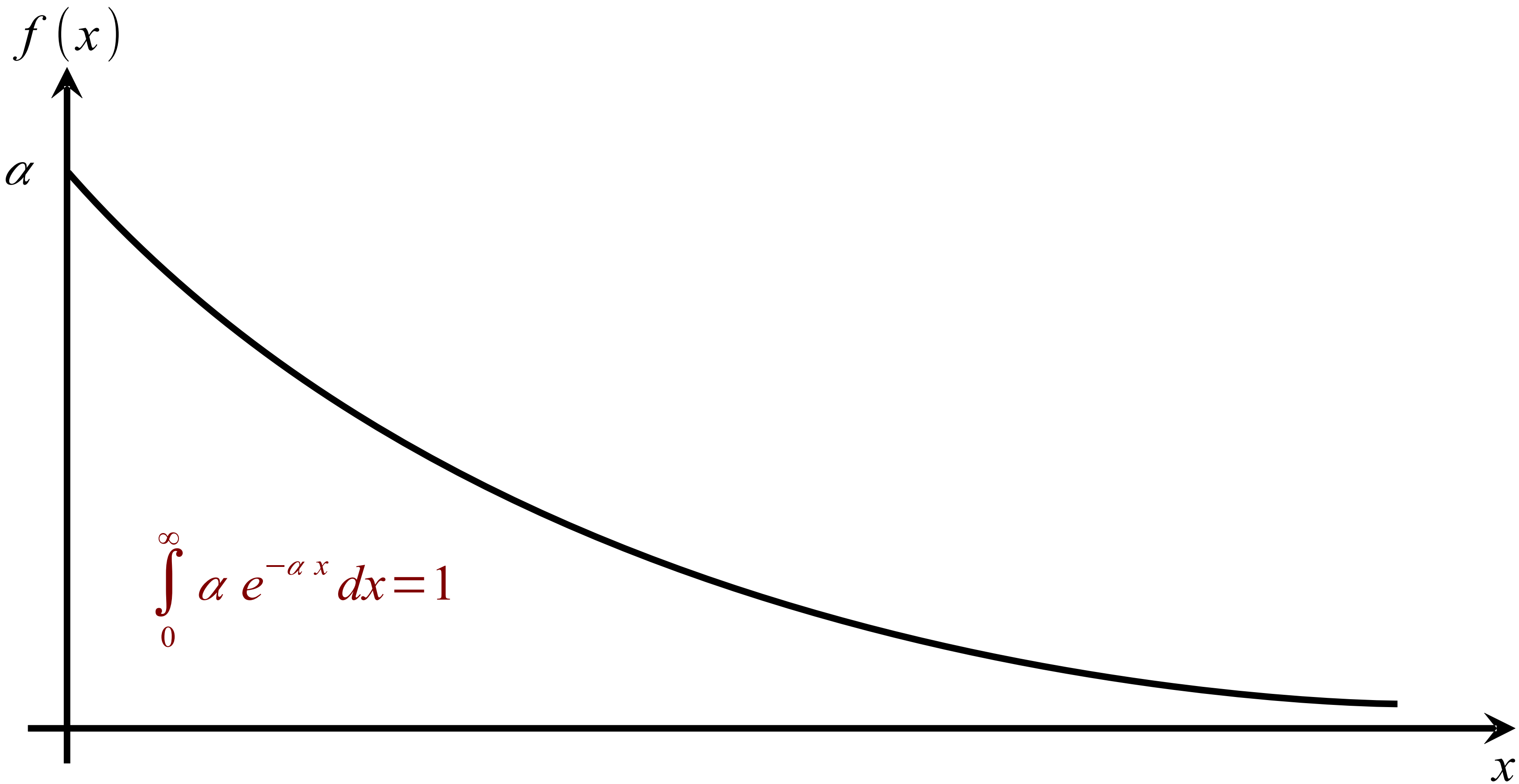
- Uma variável aleatória contínua X, assumindo valores **não negativos**, segue o modelo **Exponencial** com parâmetro $\alpha > 0$ se a sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\, e^{-\alpha x}, & x \geq 0\,; \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases} \rightarrow \quad X \sim Exp(\alpha)$$

Essa função pode ser uma função densidade de probabilidade?



Modelo Exponencial



$$\int_0^\infty \alpha\, e^{-\alpha x}\, dx = 1$$

Modelo Exponencial

$$E(X)=\mu=\int_0^{\infty} x\,\alpha\,e^{-\alpha x}\,dx$$

$\Downarrow$ **Integrando por partes**

$$\alpha\,e^{-\alpha x}dx=dv\,,\,x=u \;\rightarrow\; v=-e^{-\alpha x}\,,\,du=dx$$

$\Downarrow$

$$\mu=\left(-xe^{-\alpha x}\right)\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\,dx=\frac{1}{\alpha}$$

$$E(X^2)=\mu=\int_0^{\infty} x^2\,\alpha\,e^{-\alpha x}\,dx$$

$\Downarrow$ **Integrando por partes**

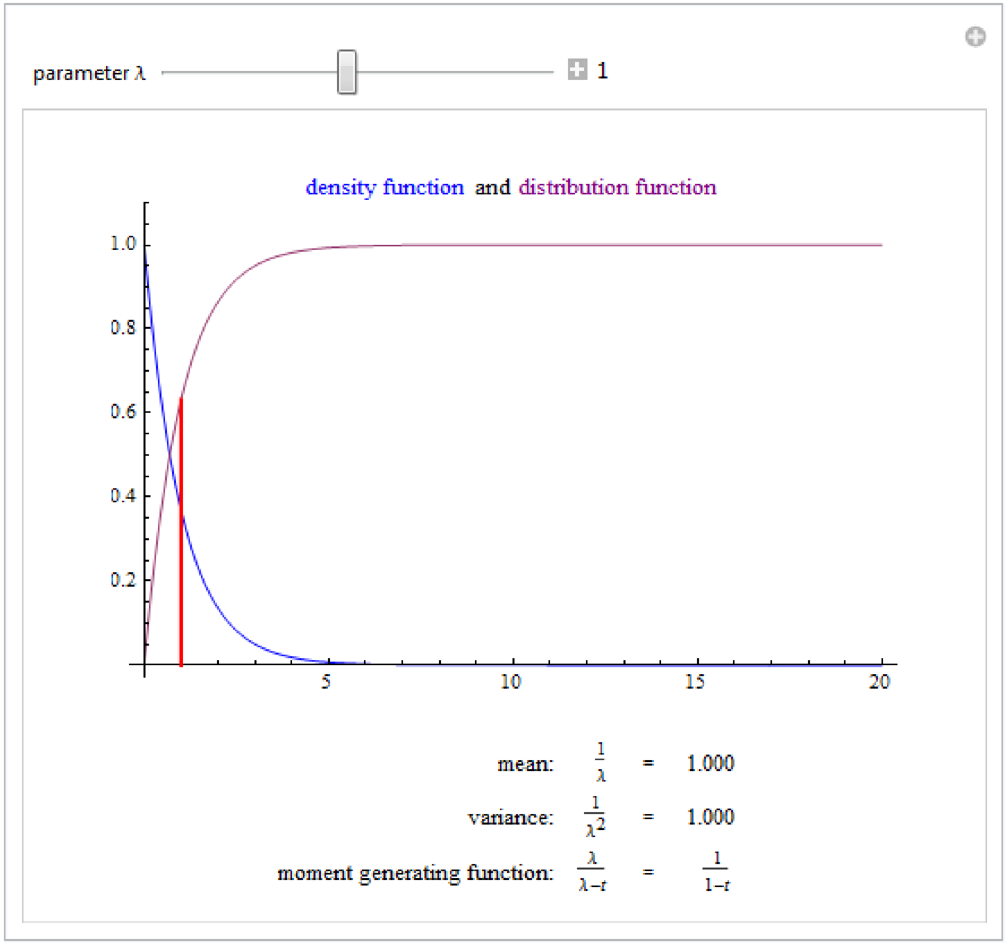
$$\mu=\frac{2}{\alpha^2}$$

$\Downarrow$

$$\sigma^2=E(X^2)-\mu^2=\frac{2}{\alpha^2}-\frac{1}{\alpha^2}=\frac{1}{\alpha^2}$$

"The Exponencial Distribution" from the Wolfram Demonstrations Project

http://demonstrations.wolfram.com/TheExponentialDistribution/



Modelo Exponencial

- A distribuição **Exponencial** tem sido **amplamente utilizada** nas áreas de **Física**, **Engenharia**, **Computação**, **Biologia** e **diversas outras**.
- **Variáveis** como a **vida útil de equipamentos**, **tempos de falha**, **tempos de sobrevivência de espécies** e **intervalos entre solicitações de recursos** são algumas das quantidades que têm sido **modeladas**, com **bons resultados**, pelo **modelo Exponencial**, que tem a **vantagem** adicional de possuir **propriedades matemáticas interessantes**.

Modelo Exponencial – Falta de Memória

$$P\left(X \geq t+s \middle| X \geq s\right) = P\,\frac{\left(X \geq t+s\,,\,X \geq s\right)}{P\left(X \geq s\right)} = \frac{P\left(X \geq t+s\right)}{P\left(X \geq s\right)} =$$

$$= \frac{\int_{t+s}^{\infty} \alpha\, e^{-\alpha\, t}\, dt}{\int_{s}^{\infty} \alpha\, e^{-\alpha\, t}\, dt} = \frac{-e^{-\alpha\, x}\Big|_{t+s}^{\infty}}{-e^{-\alpha\, x}\Big|_{s}^{\infty}} = \frac{e^{-\alpha\,(t+s)}}{e^{-\alpha\, s}} =$$

$$= e^{-\alpha\, t} = P\left(X \geq t\right)$$

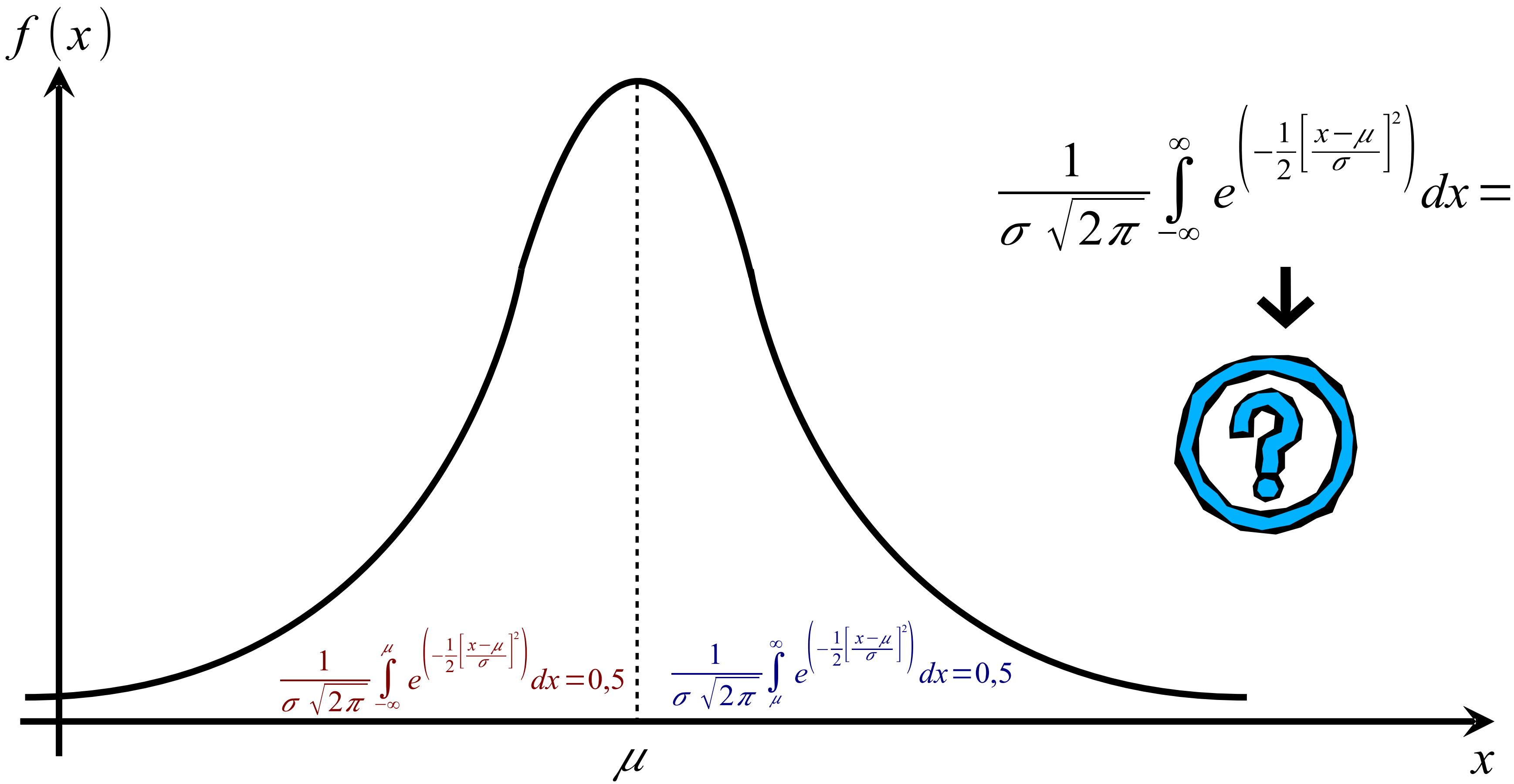
Modelo Normal

- Uma variável aleatória contínua X tem distribuição **Normal** (ou **Gaussiana**) com parâmetros μ $(-\infty < \mu < \infty)$ e σ^2 $(\sigma > 0)$ se a sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2\right)}, \quad -\infty < x < \infty \rightarrow \quad X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Essa função pode ser uma função densidade de probabilidade?

Modelo Normal



$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2\right)}dx = 1$$

$$\downarrow$$

Média? Mediana? Moda? Variância?

Modelo Normal

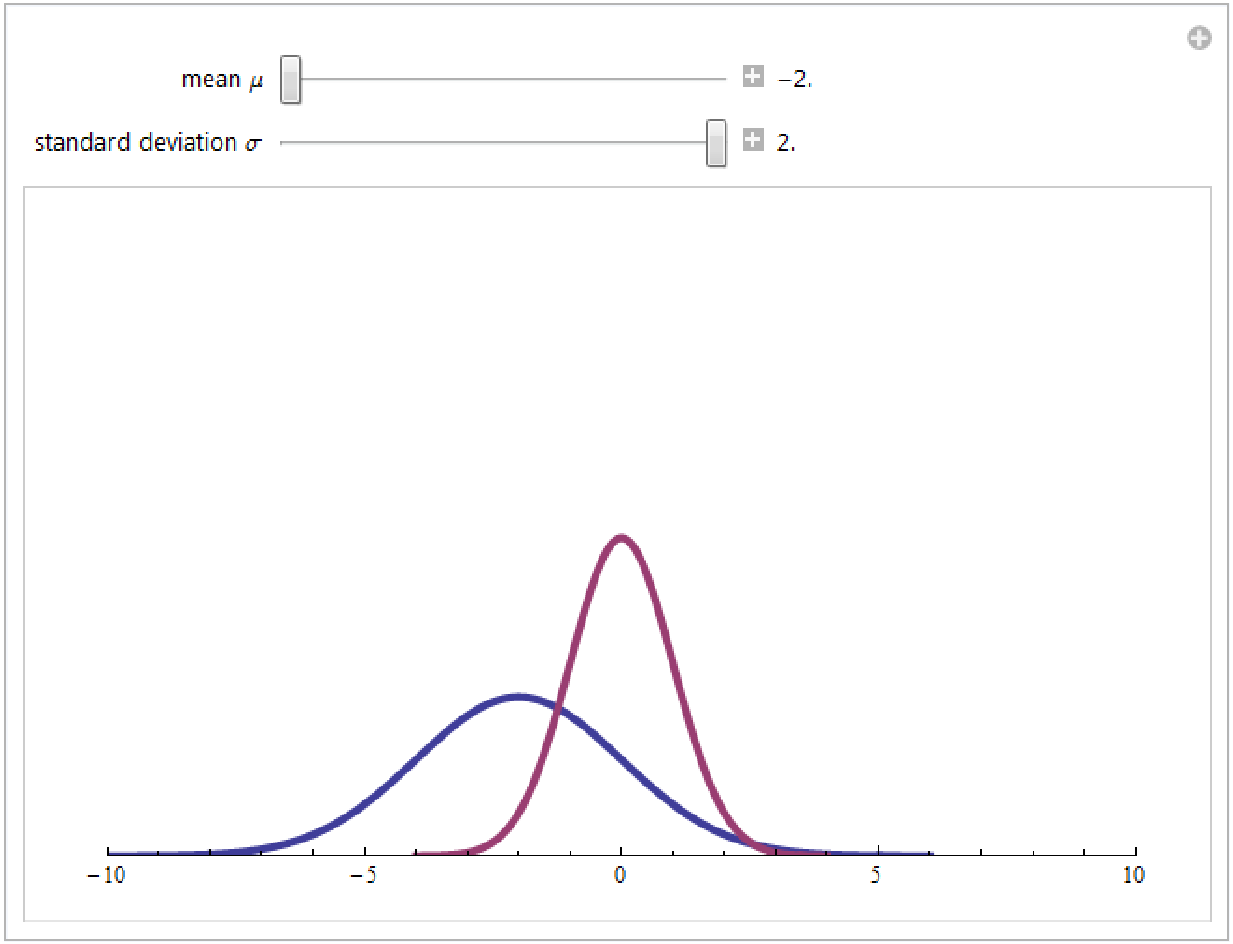
$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \rightarrow \begin{cases} E(X) &= \mu \\ Mo(X) &= \mu \\ Md(X) &= \mu \\ Var(X) &= \sigma^2 \end{cases}$$

Arquivo: PropriedadesDistribuicaoNormal.pdf.

x

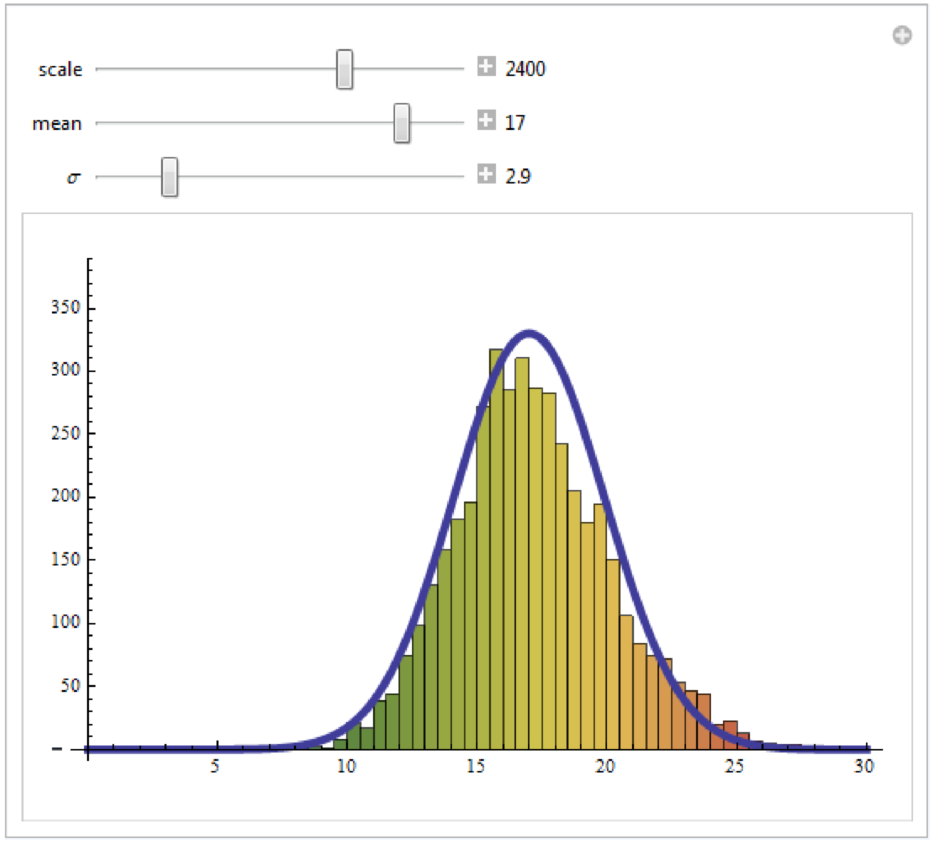
"The Normal Distribution" from the Wolfram Demonstrations Project

http://demonstrations.wolfram.com/TheNormalDistribution/



"Matching Temperature Data to a Normal Distribution" from the Wolfram Demonstrations Project

http://demonstrations.wolfram.com/MatchingTemperatureDataToANormalDistribution/



The temperature data for London over the summers from 1976 to 2010 is plotted as a histogram. Choose parameters to match a normal distribution curve to the histogram.

Modelo Normal

- Para **calcular probabilidades** para uma variável aleatória contínua com distribuição Normal, deve-se **resolver a integral** da função densidade de probabilidade no **intervalo de interesse**:

$$P(x \leq a \leq b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2\right)} dx\,.$$

- Essa integral **não pode ser resolvida pelos caminhos comuns**:
  - O **Teorema Fundamental do Cálculo não pode** ser aplicado, pois **não é possível determinar a antiverivada**.

Modelo Normal

E agora, quem poderá nos **ajudar**?

O Chapolim Colorado?

Modelo Normal

- Utilizando-se **métodos de integração numérica**, as **integrais** envolvidas nos cálculos de probabilidades para variáveis aleatórias contínuas com distribuição normal podem ser **resolvidas de modo aproximado**.
- Por meio desse processo, podem ser construídas **tabelas** que **auxiliam** na determinação das probabilidades.
- Surge, nesse contexto, a seguinte **questão**:
  - Deve-se construir **uma tabela para cada par de valores de média e desvio padrão**?

Modelo Normal

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \rightarrow \quad Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

Variável Aleatória
$Z = aX + b$
$E(Z) = aE(X) + b$
$Var(Z) = a^2 Var(X)$

$$E(Z) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} E(X-\mu) = \frac{1}{\sigma}\left[E(X)-\mu\right] = 0$$

$$Var(Z) = Var\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} Var(X-\mu) = \frac{1}{\sigma^2} Var(X) = 1$$

$$\begin{aligned} P(a \le X \le b) &= P(a-\mu \le X-\mu \le b-\mu) \\ &= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

Modelo Normal

- A **transformação** realizada sobre a VA X para gerar a VA Z não **altera a normalidade** e, portanto, **a variável aleatória Z possui distribuição Normal com média igual a 0 e desvio-padrão igual a 1**.
- A variável aleatória Z será denominada **Normal Padrão** ou **Normal Reduzida**.
- Considerando os resultados do *slide* anterior, conclui-se que **é necessário tabular apenas os dados para a variável aleatória Z**.

Modelo Normal

$$X \sim N(1,4) \quad \rightarrow \quad Z = \frac{X-1}{2}$$

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= P(a-\mu \leq X-\mu \leq b-\mu) \\ &= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} P(3 \leq X \leq 5) &= P(3-1 \leq X-1 \leq b-1) \\ &= P\left(\frac{3-1}{2} \leq \frac{X-1}{2} \leq \frac{b-1}{2}\right) \\ &= P\left(\frac{2}{2} \leq Z \leq \frac{3}{2}\right) = P(1 \leq Z \leq 1{,}5) \end{aligned}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0,1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0,2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0,3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0,4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0,5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0,6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0,7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0,8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0,9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1,0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1,1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1,2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1,3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41309	0.41466	0.41621	0.41774
1,4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1,5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1,6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1,7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1,8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1,9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2,0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2,1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2,2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2,3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2,4	0.49180	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2,5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2,6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2,7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2,8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2,9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3,0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900
3,1	0.49903	0.49906	0.49910	0.49913	0.49916	0.49918	0.49921	0.49924	0.49926	0.49929
3,2	0.49931	0.49934	0.49936	0.49938	0.49940	0.49942	0.49944	0.49946	0.49948	0.49950
3,3	0.49952	0.49953	0.49955	0.49957	0.49958	0.49960	0.49961	0.49962	0.49964	0.49965
3,4	0.49966	0.49968	0.49969	0.49970	0.49971	0.49972	0.49973	0.49974	0.49975	0.49976
3,5	0.49977	0.49978	0.49978	0.49979	0.49980	0.49981	0.49981	0.49982	0.49983	0.49983
3,6	0.49984	0.49985	0.49985	0.49986	0.49986	0.49987	0.49987	0.49988	0.49988	0.49989
3,7	0.49989	0.49990	0.49990	0.49990	0.49991	0.49991	0.49992	0.49992	0.49992	0.49992
3,8	0.49993	0.49993	0.49993	0.49994	0.49994	0.49994	0.49994	0.49995	0.49995	0.49995
3,9	0.49995	0.49995	0.49996	0.49996	0.49996	0.49996	0.49996	0.49996	0.49997	0.49997

Tabela 1: Probabilidades $p = P[0 \leq Z \leq Z_t]$ da Distribuição Normal padrão com valores de Z_t dados nas margens da tabela

Segunda casa decimal de Z_t.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0,1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0,2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0,3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0,4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0,5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0,6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0,7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0,8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0,9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1,0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214

$$P\left(0 \leq Z \leq 0{,}85\right)$$

Parte inteira e primeira casa decimal de Z_t.

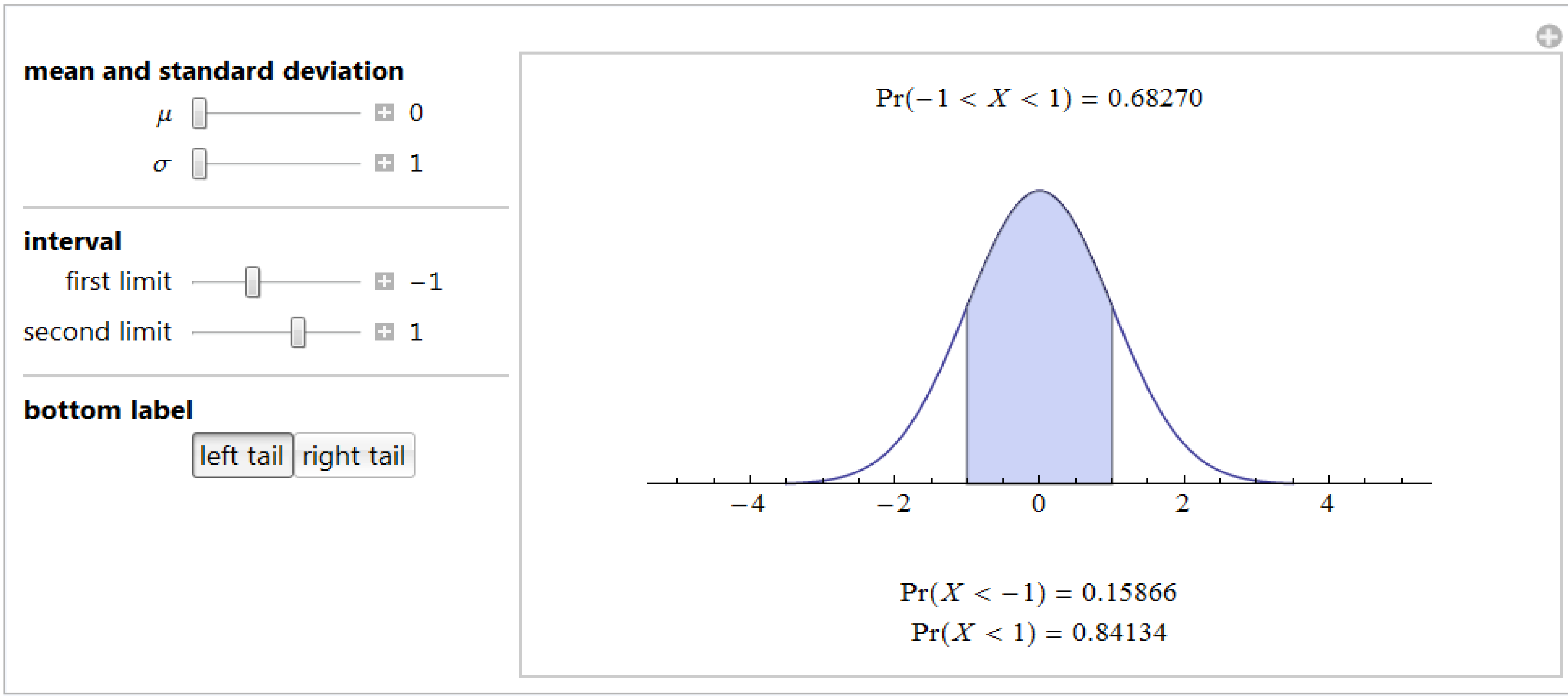
Aprendendo a Utilizar a Tabela

- A tabela apresenta **apenas** os valores de probabilidades para $P(0 \leq Z \leq Z_t)$.
- Como determinar, por exemplo, $P(-1 \leq Z \leq 3)$?

SIMETRIA! :-)

"Finding Probabilities for Intervals of a Normal Distribution" from the Wolfram Demonstrations Project

http://demonstrations.wolfram.com/FindingProbabilitiesForIntervalsOfANormalDistribution/



VAMOS TREINAR! :-)

That's All Folks!

Próxima aula: exercícios do capítulo 6...