Sinais e Sistemas

Sistemas Lineares Invariantes no Tempo

Renato Dourado Maia

Faculdade de Ciência e Tecnologia de Montes Claros

Fundação Educacional Montes Claros

Introdução

$h(t),\ h[n]$ ⇨ Resposta do sistema quando a entrada é um impulso unitário, $\delta(t),\ \delta[n]$.

A Resposta ao Impulso caracteriza um sistema LTI: dada uma entrada *x*, pode-se, conhecendo-se *h*, determinar-se *y*. Esse método é denominado Convolução.

Sinais Discretos e Soma de Impulsos

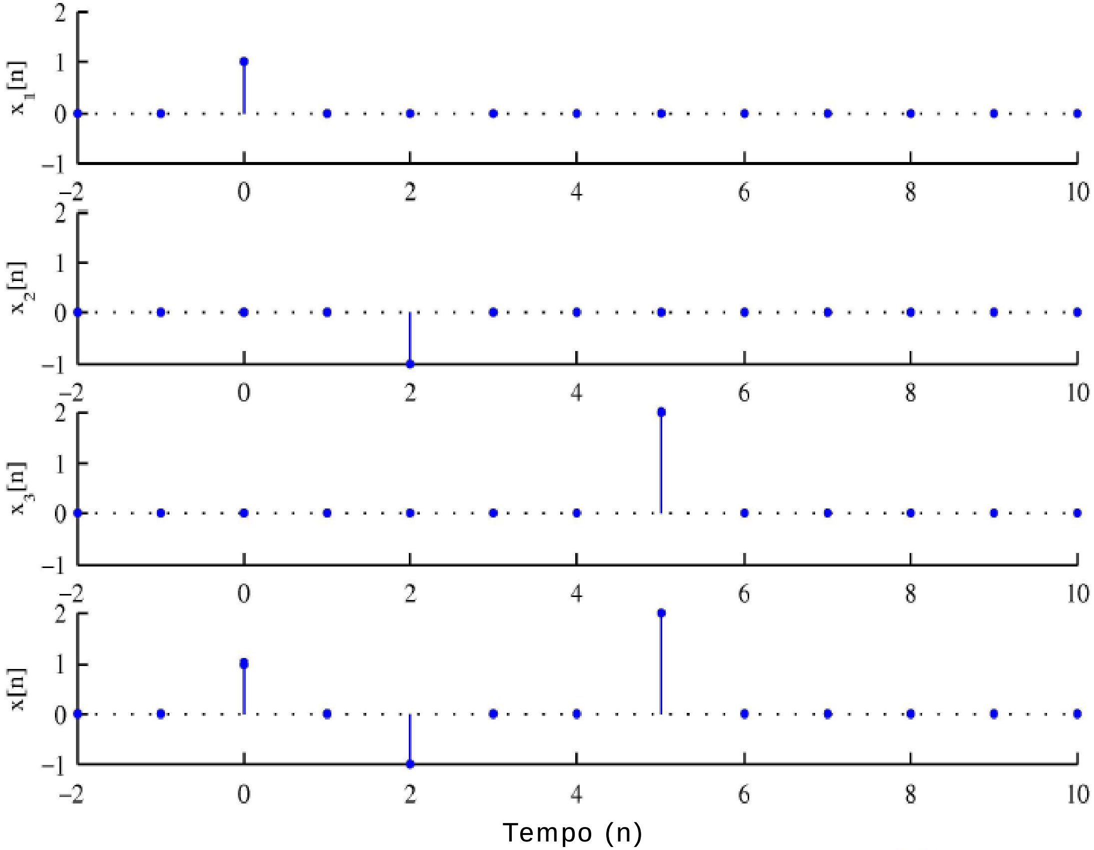
- Seja o seguinte sinal: $x[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ -1, & n = 2 \\ 2, & n = 5 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$

O sinal pode ser escrito como uma soma de impulsos?

SIM!!! ⟹ $x[n] = 1\delta[n] - 1\delta[n-2] + 2\delta[n-5] = x_1[n] + x_2[n] + x_3[n]$

Sinais Discretos e Soma de Impulsos

$$x[n] = 1\delta[n] - 1\delta[n-2] + 2\delta[n-5] = x_1[n] + x_2[n] + x_3[n]$$



Sinais Discretos e Soma de Impulsos

- Todo sinal discreto limitado pode ser escrito como uma soma ponderada de impulsos unitários deslocados no tempo:

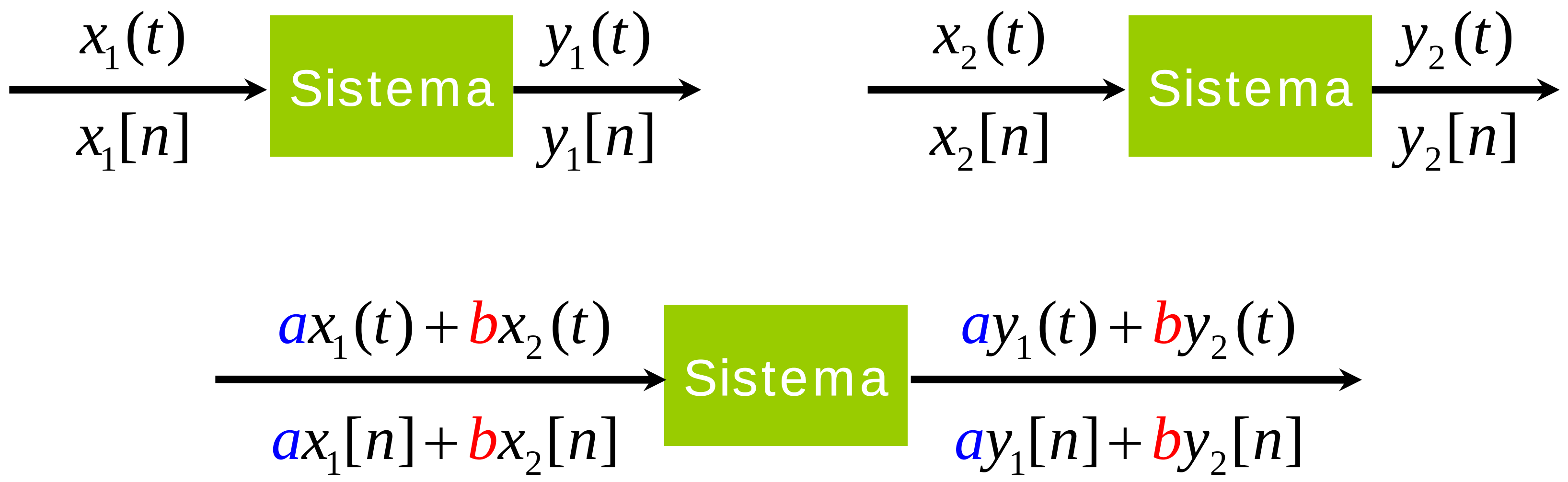
Impulso Deslocado

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k]$$

Peso

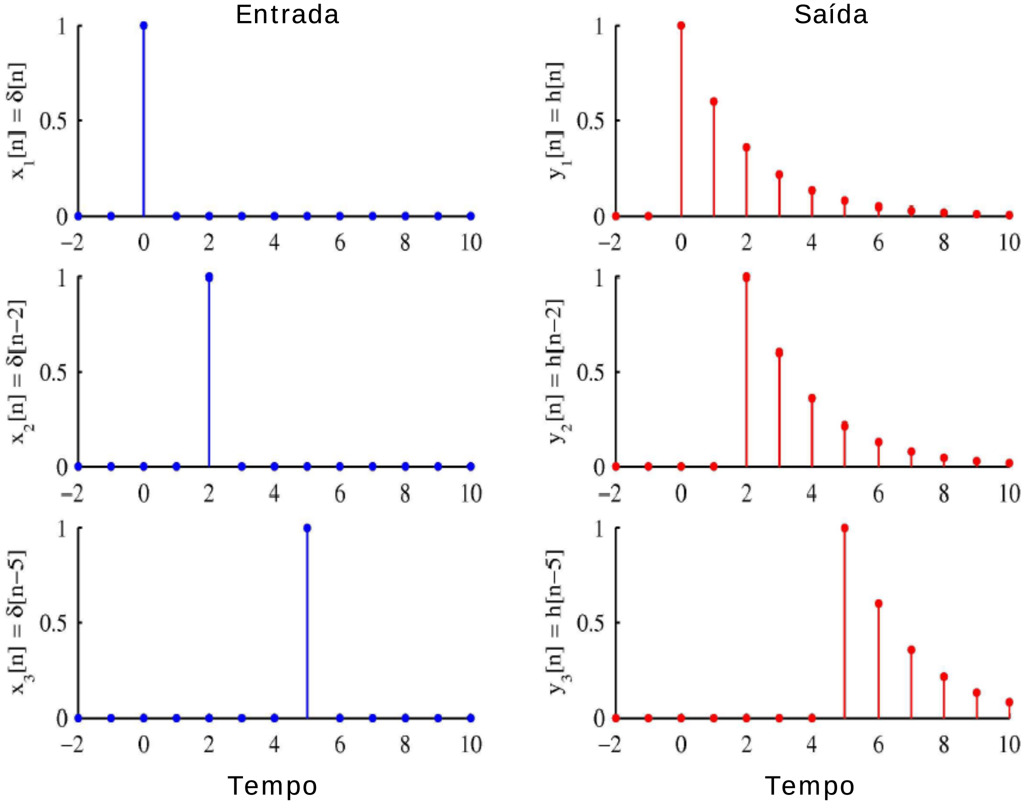
Lembrando...

- Linearidade:



Lembrando...

- Invariância no Tempo:



Somatório de Convolução

- Retomando o exemplo:

$$x[n]=1\delta[n]-1\delta[n-2]+2\delta[n-5]=x_1[n]+x_2[n]+x_3[n]$$

Considerando a LINEARIDADE e a INVARIÂNCIA NO TEMPO:

$$y[n]=y_1[n]+y_2[n]+y_3[n]$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1[n]=\delta[n]\rightarrow y_1[n]=1h[n] \\ x_2[n]=-\delta[n-2]\rightarrow y_2[n]=-1h[n-2] \\ x_2[n]=2\delta[n-5]\rightarrow y_3[n]=2h[n-5] \end{array}\right\} y[n]=1h[n]-1h[n-2]+2h[n-5]$$

A saída é uma soma ponderada das saídas devidas a cada entrada, ou seja, um somatório de respostas ao impulso deslocadas e ponderadas!

Somatório de Convolução

- Generalizando para qualquer sinal discreto limitado:

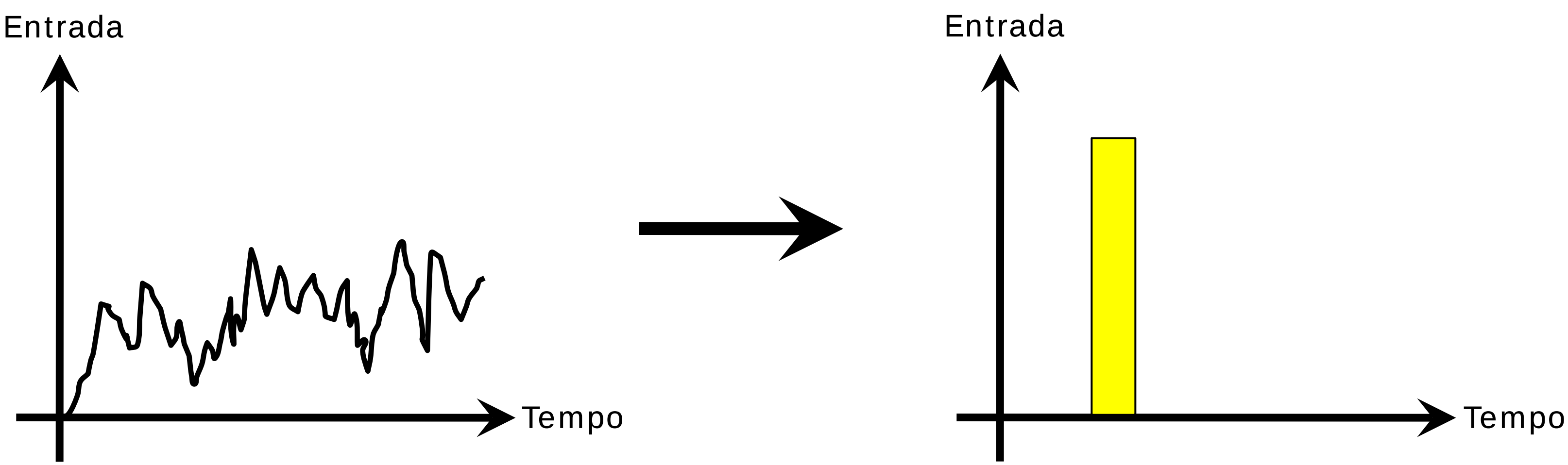
$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] \longrightarrow \text{Sinal Discreto Limitado}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = x[n]*h[n] = h[n]*x[n]$$

→ Somatório de Convolução

UM SISTEMA LTI É COMPLETAMENTE CARACTERIZADO POR SUA RESPOSTA AO IMPULSO UNITÁRIO!!!

Reflexão



Somatório de Convolução - Resumo

$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$

$\delta[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow h[n]$ $\longrightarrow$ Definição de $h[n]$

$\delta[n-k] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow h[n-k]$ $\longrightarrow$ Invariância no Tempo

$x[k]\delta[n-k] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow x[k]h[n-k]$ $\longrightarrow$ Linearidade

$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$ $\longrightarrow$ Linearidade

$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$ $\longrightarrow$ Definição de $\delta[n]$

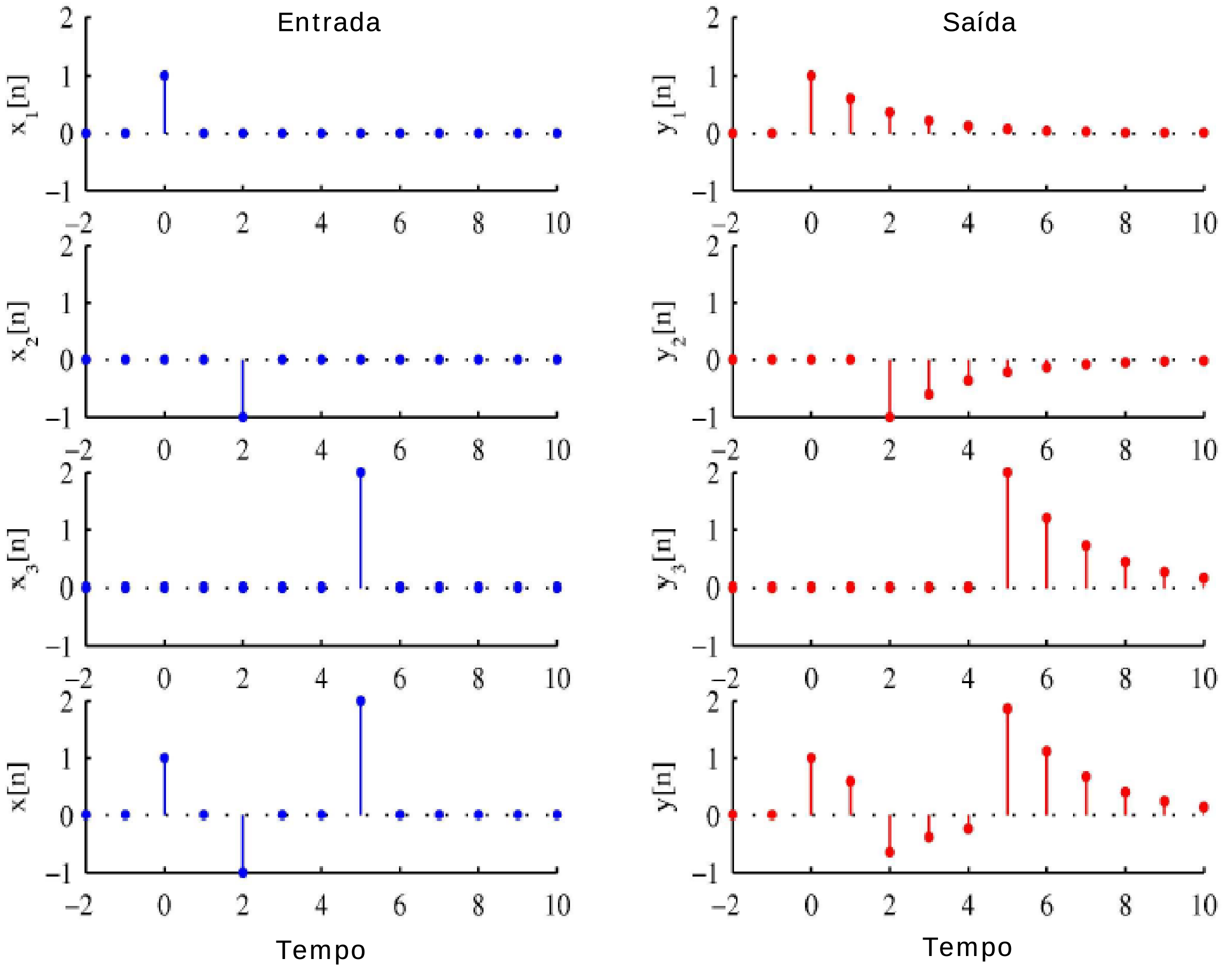
Somatório de Convolução

Exemplo

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ -1, & n = 2 \\ 2, & n = 5 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

$$h[n] = a^n u[n] = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}, \quad com\ a\ =\ 0.6$$

Somatório de Convolução



Somatório de Convolução

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]h[k]$$

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[-k] \quad y[1] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[-k+1] \quad y[2] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[-k+2] \; \ldots$$

O que acontece para cada valor de *n*, se imaginarmos os sinais em função da variável *k*?

Vejamos uma animação em Java para compreendermos a segunda interpretação do somatório de convolução: rebate, desloca, multiplica e soma...

Somatório de Convolução

Exemplo – O Mesmo ☺

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ -1, & n = 2 \\ 2, & n = 5 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

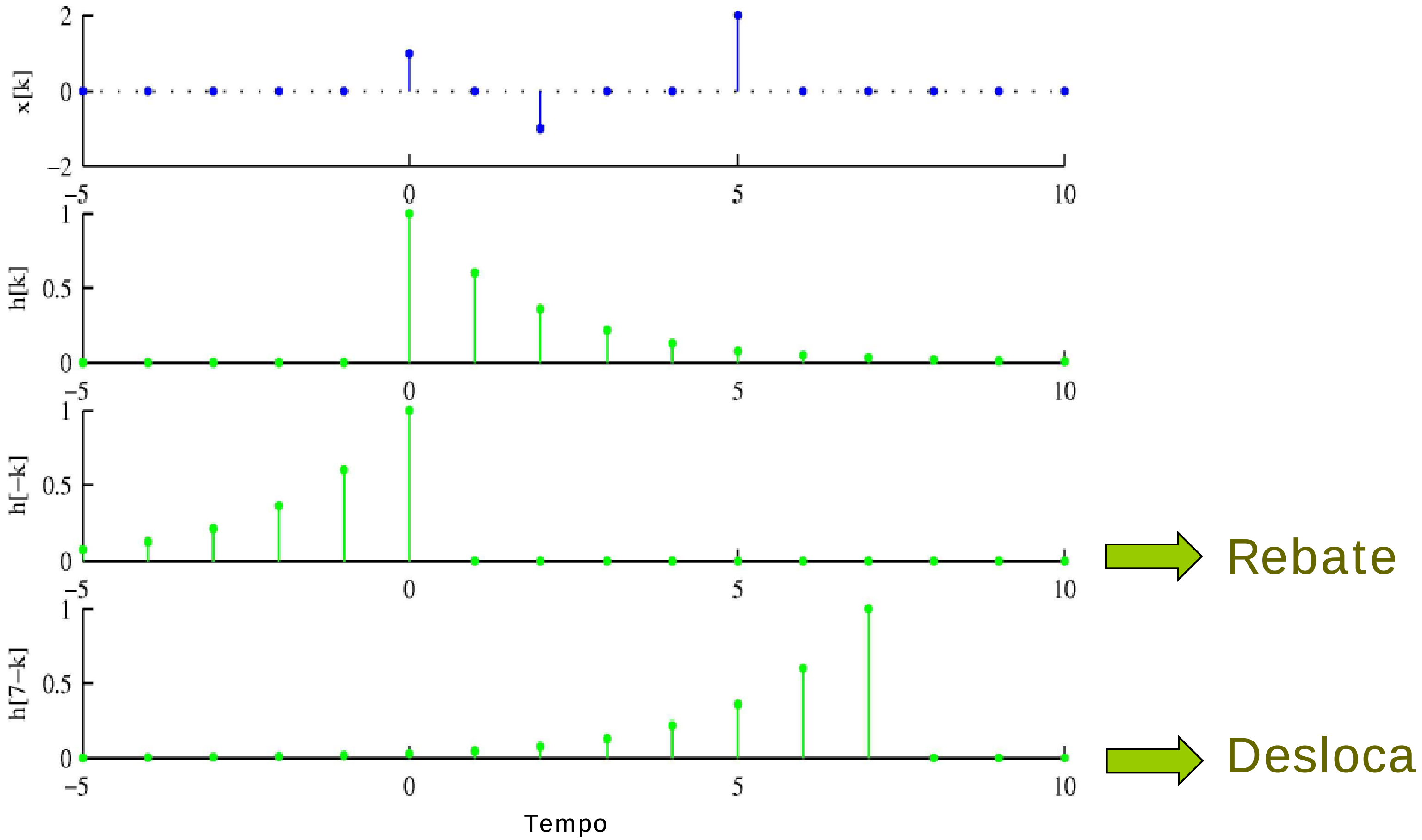
$$h[n] = a^n u[n] = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}, \quad com\ a = 0.6$$

Somatório de Convolução

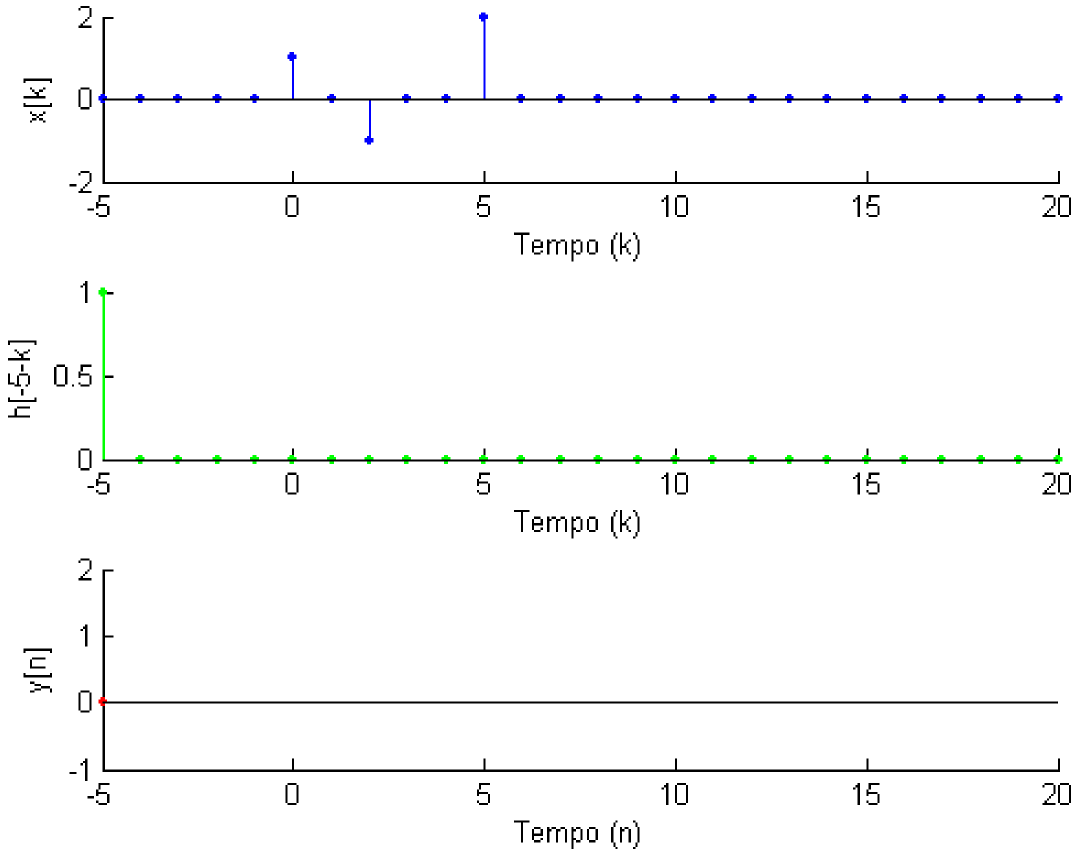
- Vamos observar graficamente a resolução do exemplo utilizando a interpretação rebate, desloca, multiplica e soma.

Script: M_6_SistemasLTIProg1.m

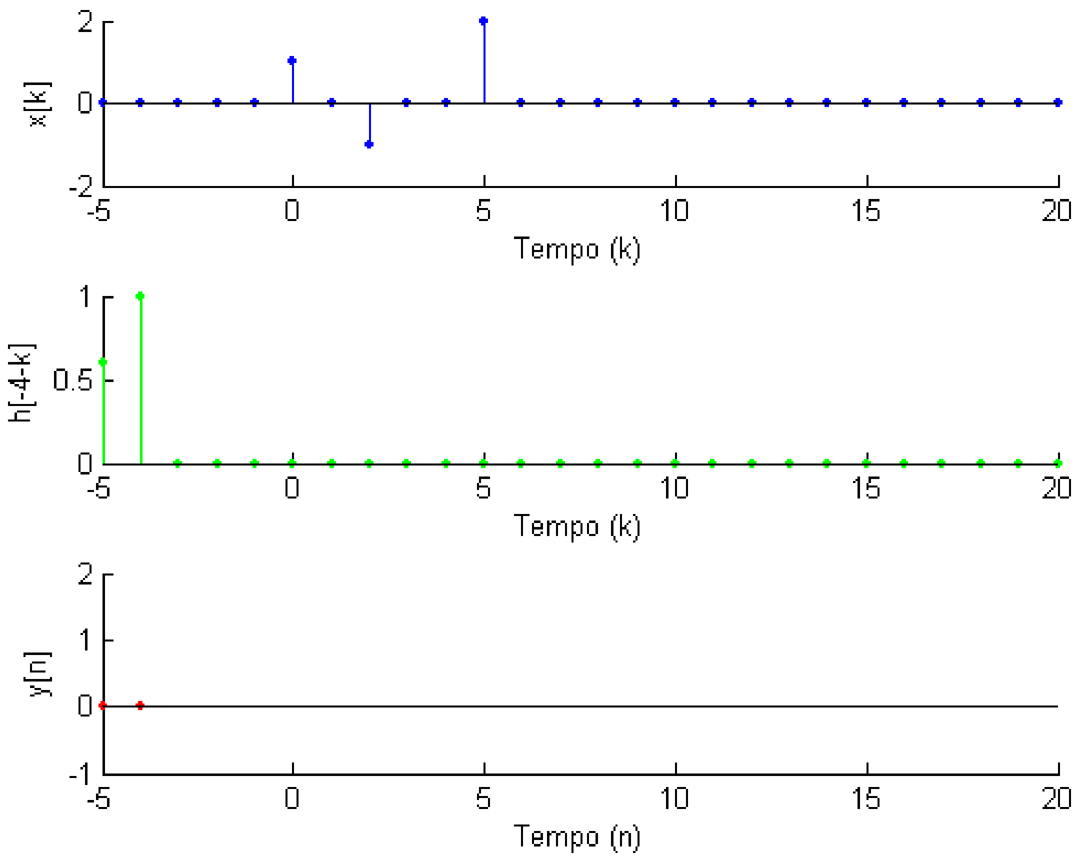
Somatório de Convolução



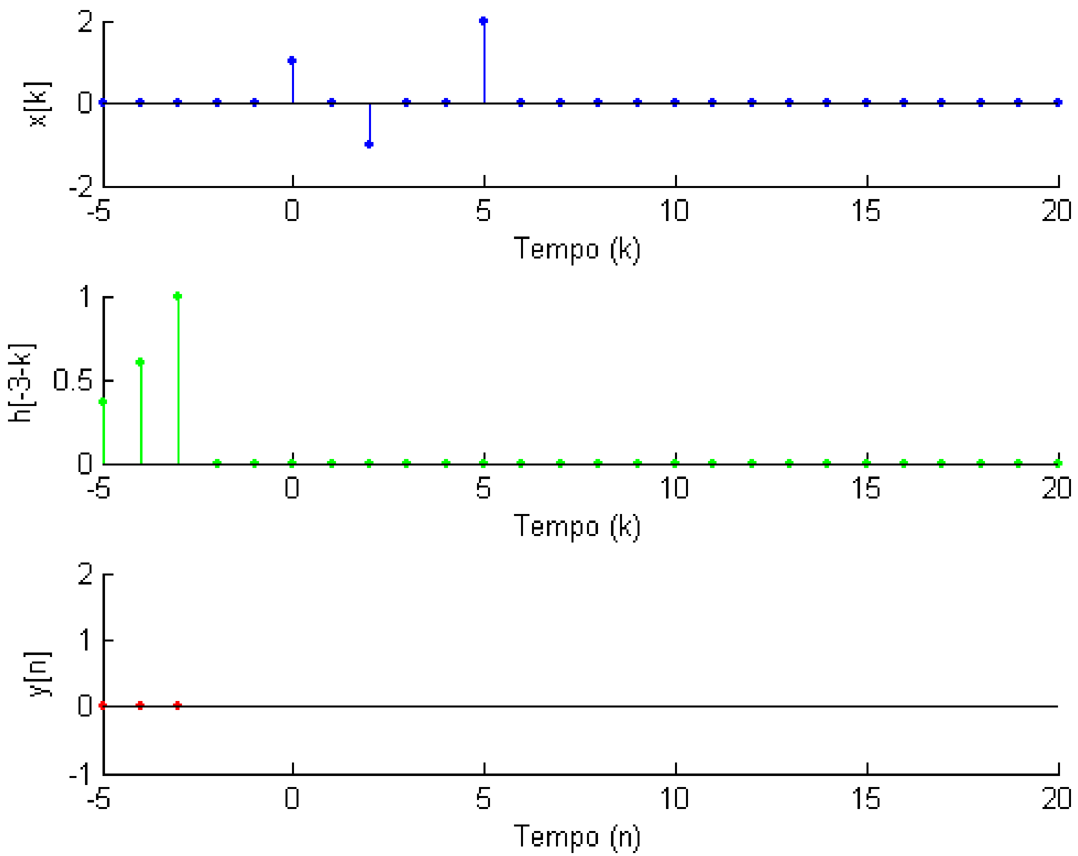
n = -5



n = -4

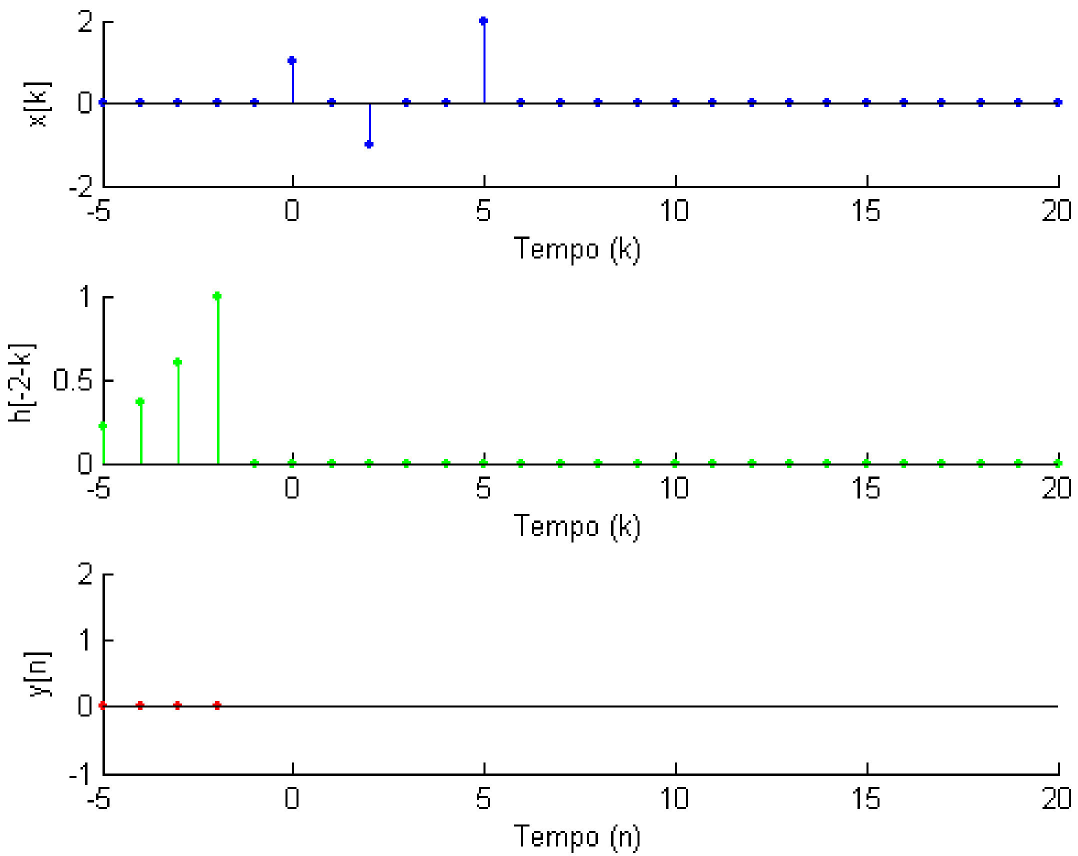


n = -3

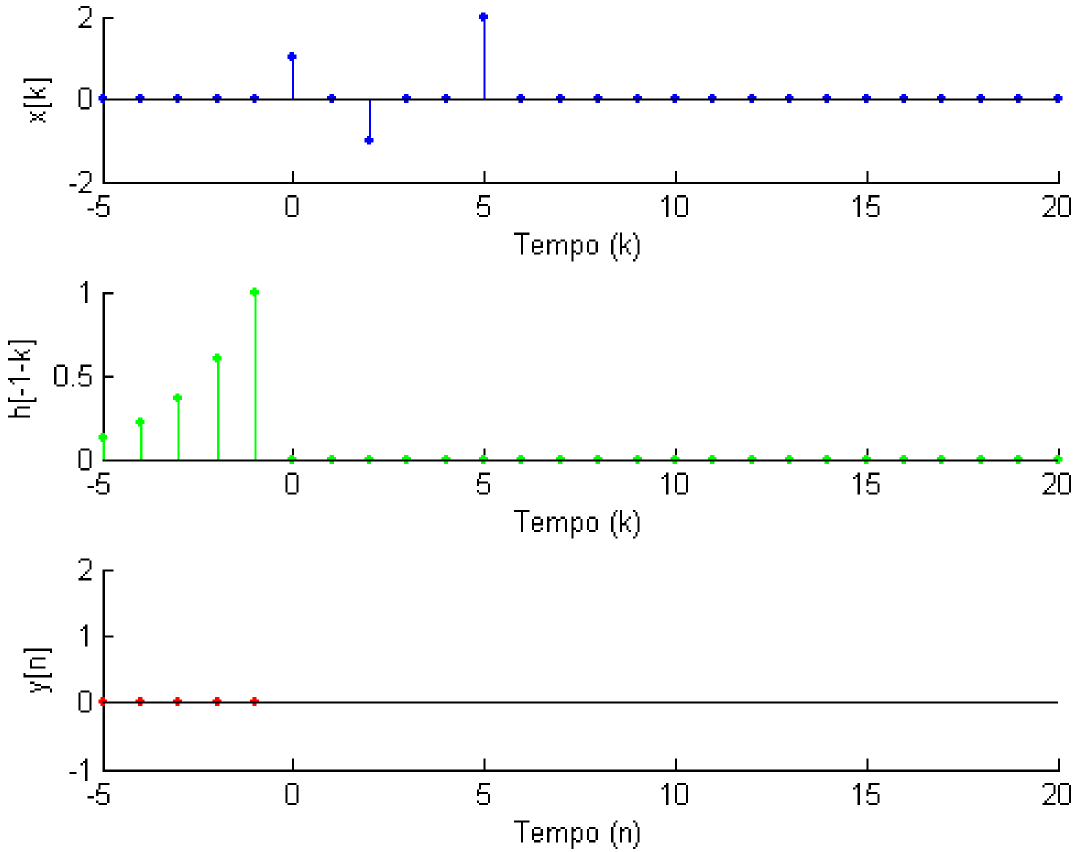


x[k]
2
0
-2
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
h[-3-k]
1
0.5
0
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
y[n]
2
1
0
-1
-5
0
5
10
15
20
Tempo (n)

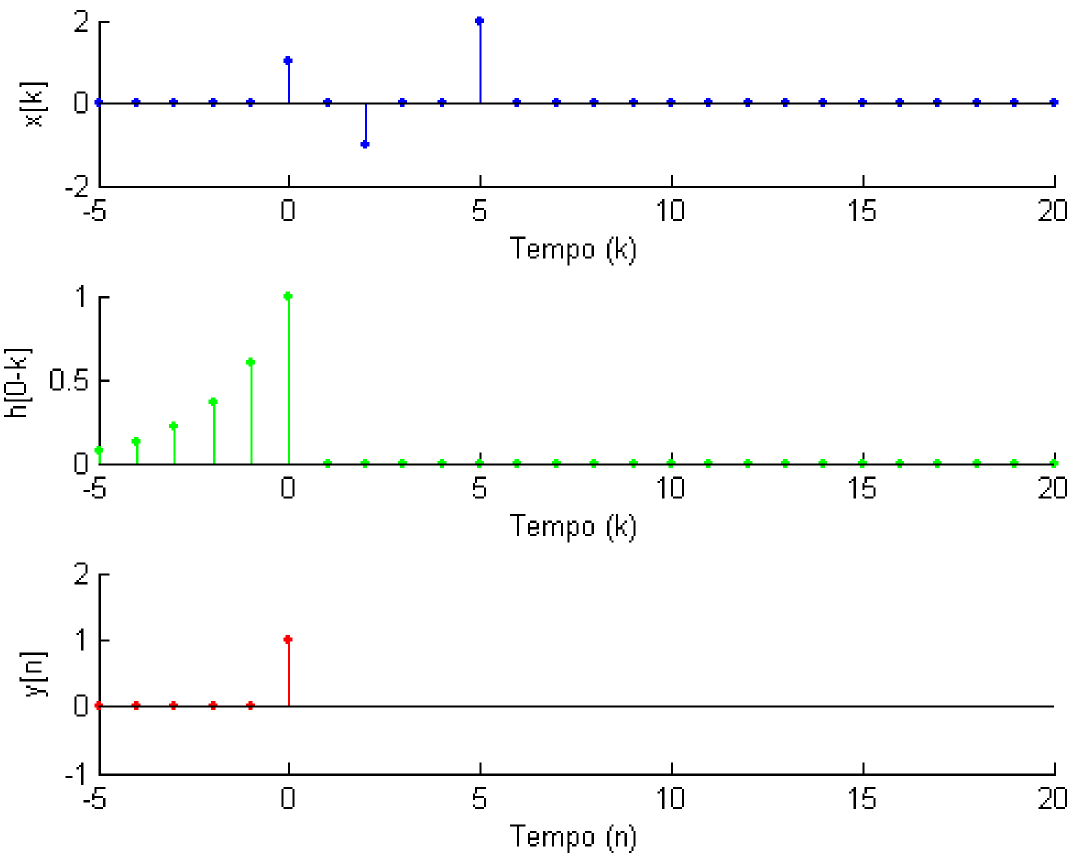
n = -2


2
0
-2
x[k]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
1
0.5
0
h[-2-k]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
2
1
0
-1
y[n]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (n)

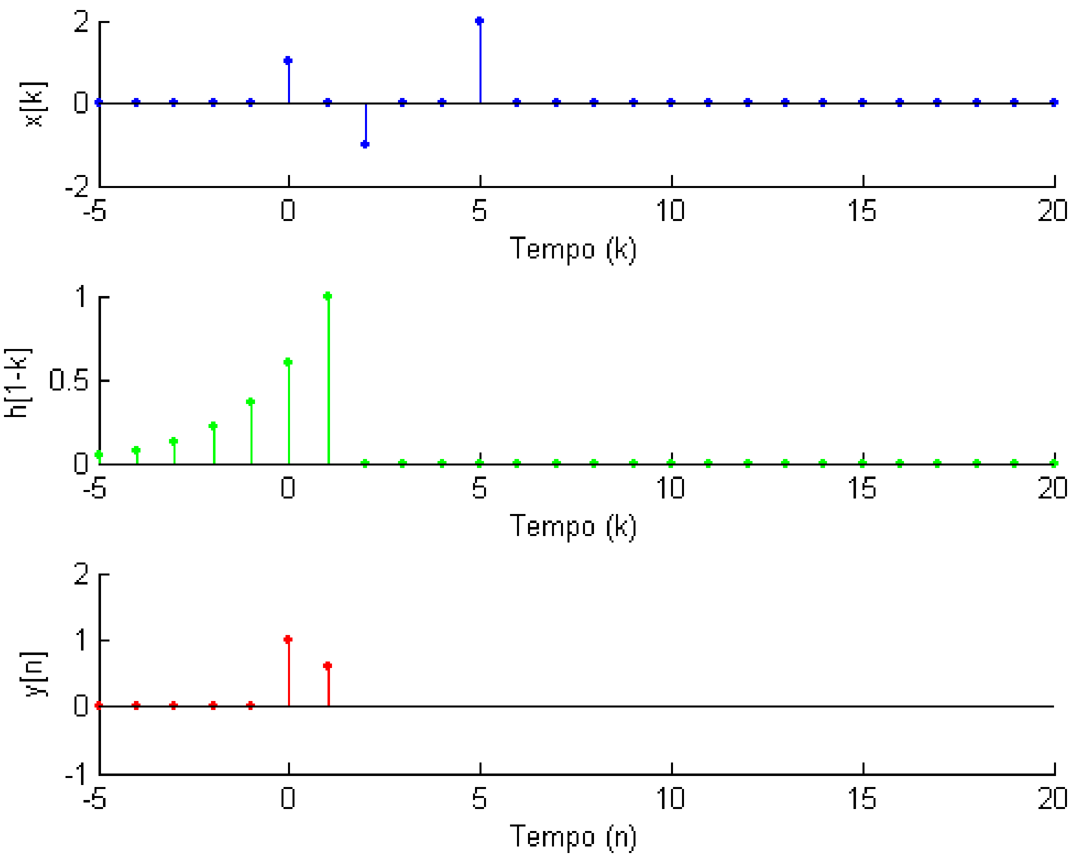
n = -1



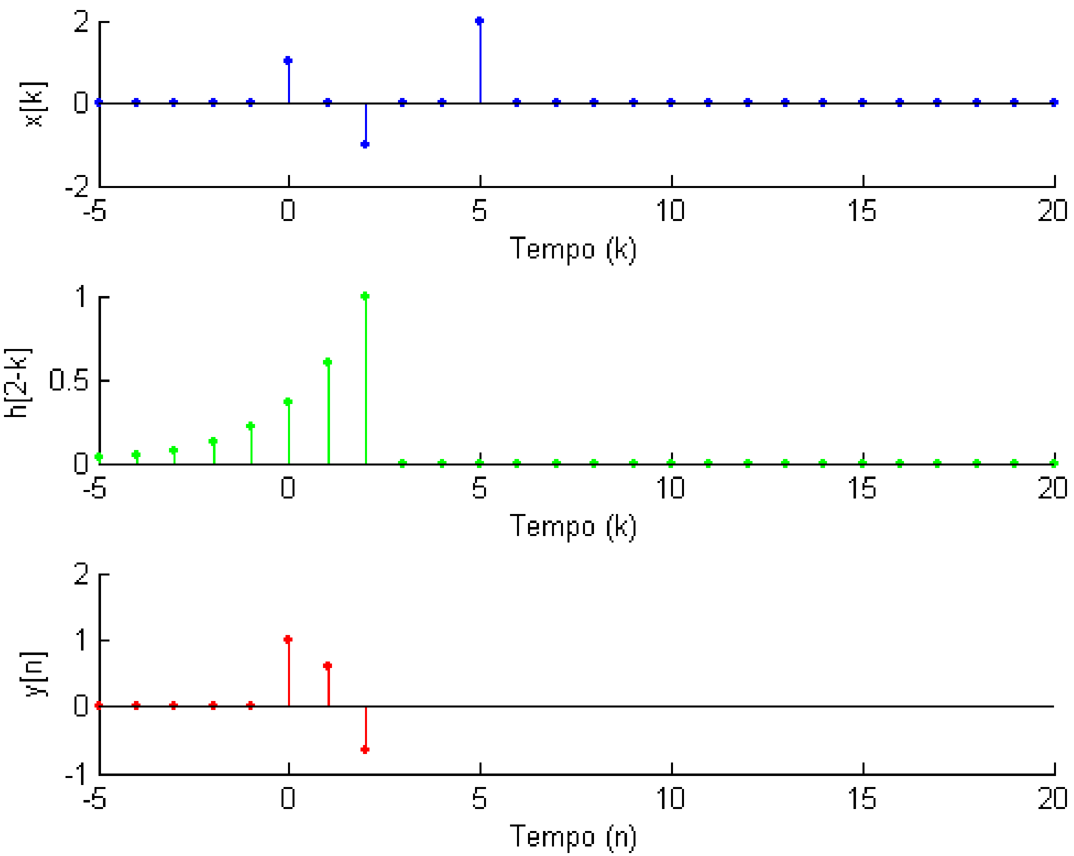
$n = 0$



n = 1

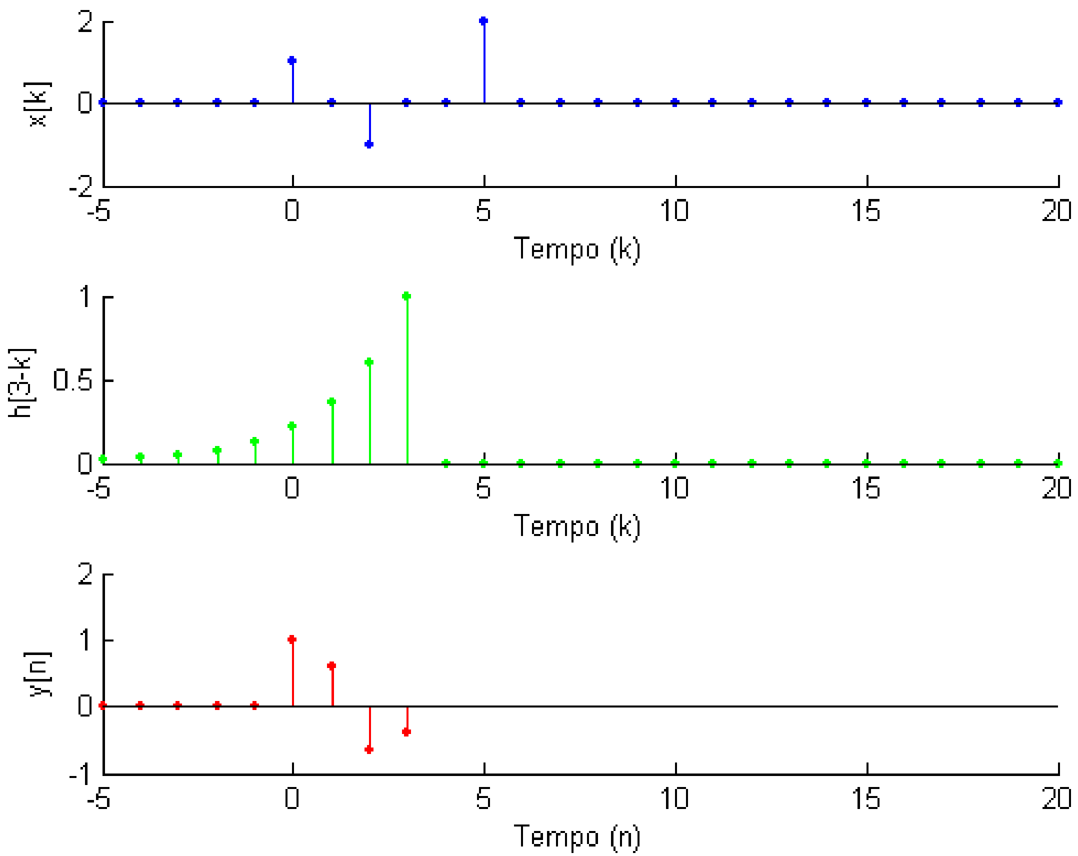

x[k]
2
0
-2
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
h[1-k]
1
0.5
0
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
y[n]
2
1
0
-1
-5
0
5
10
15
20
Tempo (n)

n = 2



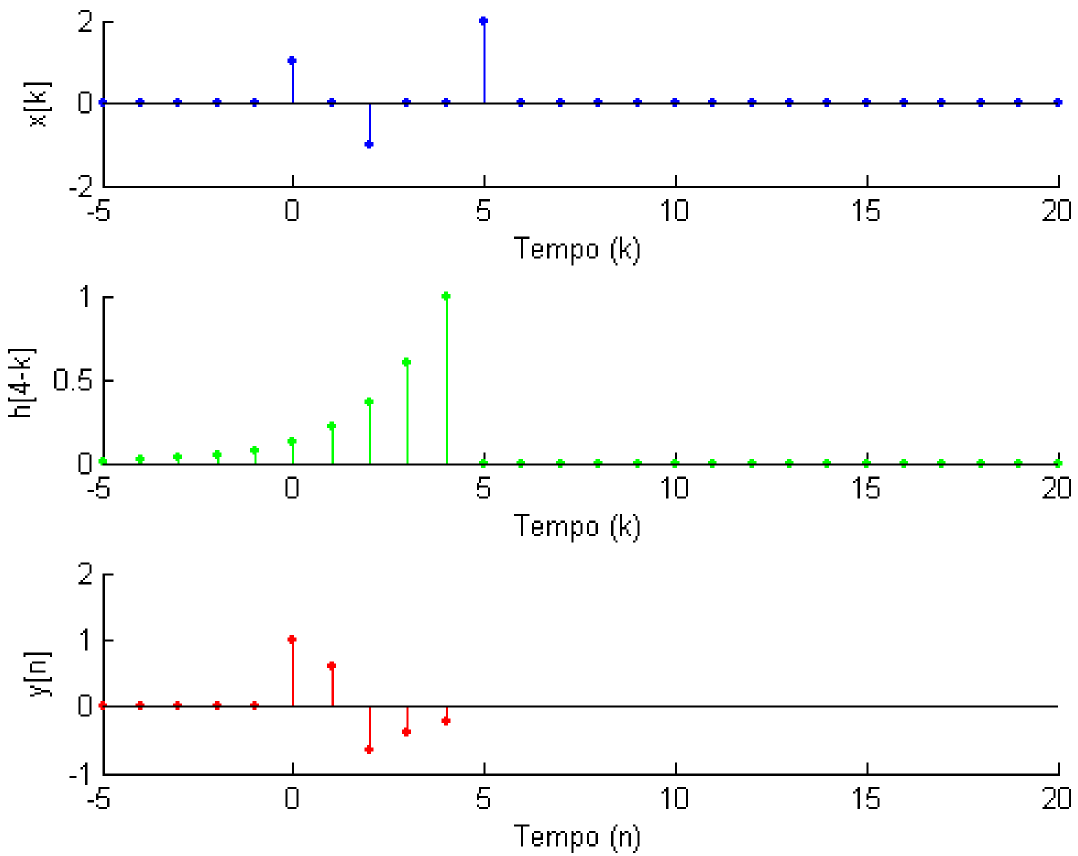
2
0
-2
x[k]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
1
0.5
0
h[2-k]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
2
1
0
-1
y[n]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (n)

n = 3

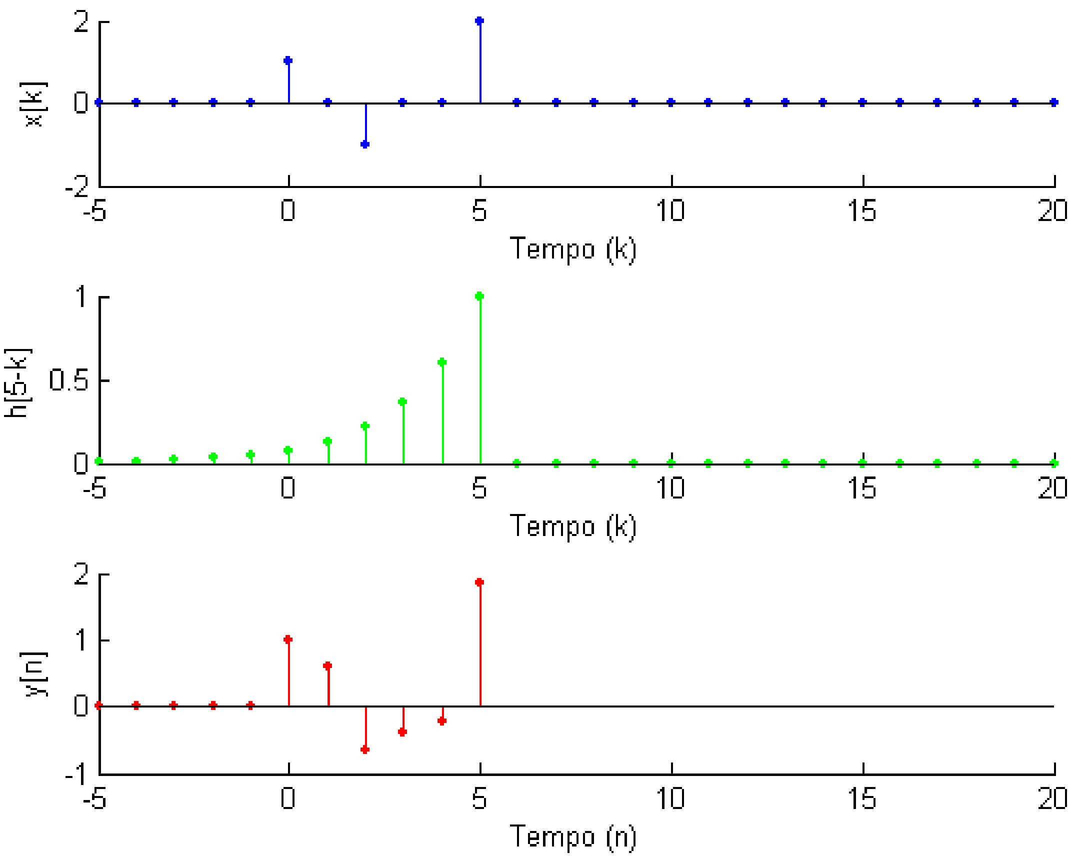


x[k]
2
0
-2
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
h[3-k]
1
0.5
0
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
y[n]
2
1
0
-1
-5
0
5
10
15
20
Tempo (n)

$n = 4$

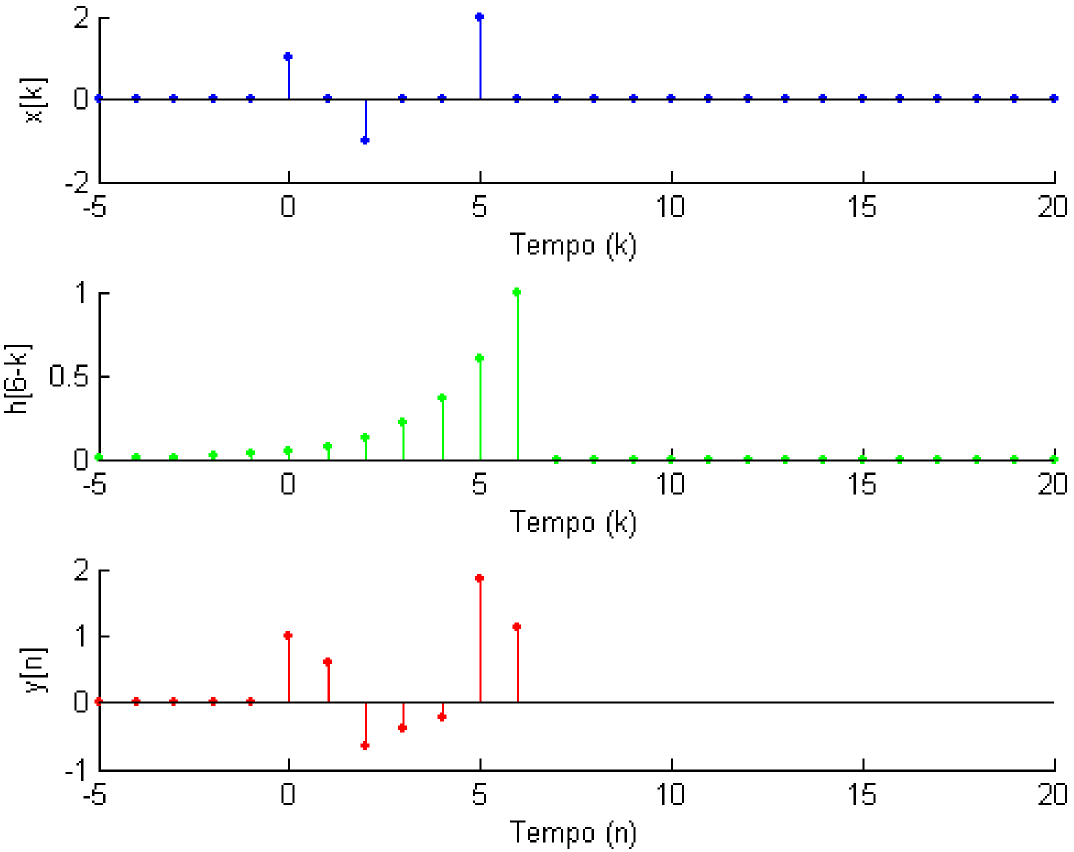


n = 5

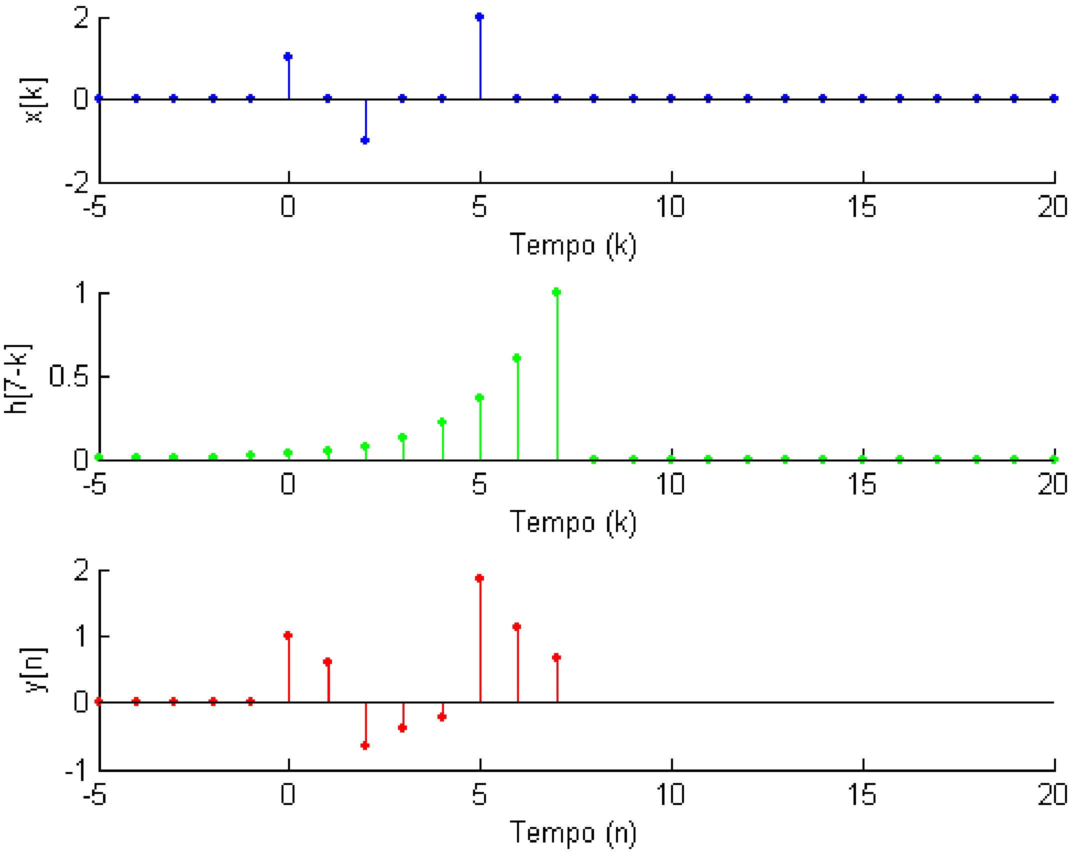


2
0
-2
x[k]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
1
0.5
0
h[5-k]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
2
1
0
-1
y[n]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (n)

n = 6

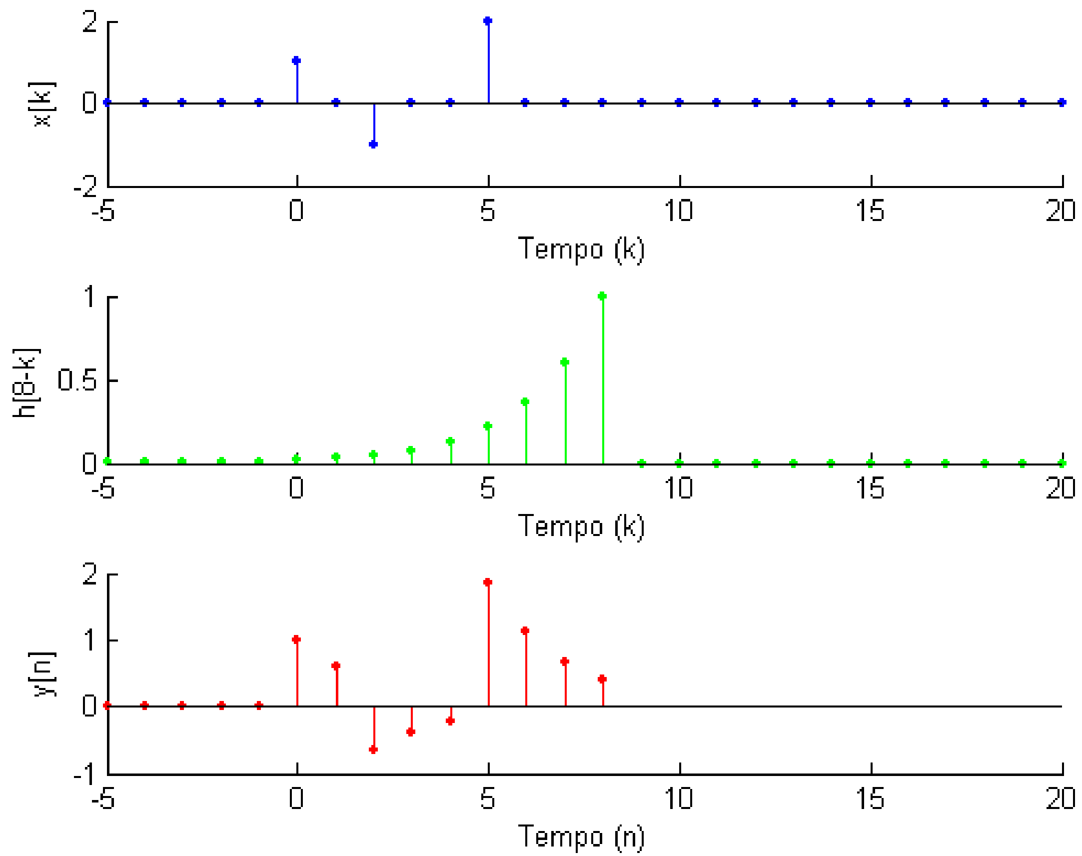


n = 7

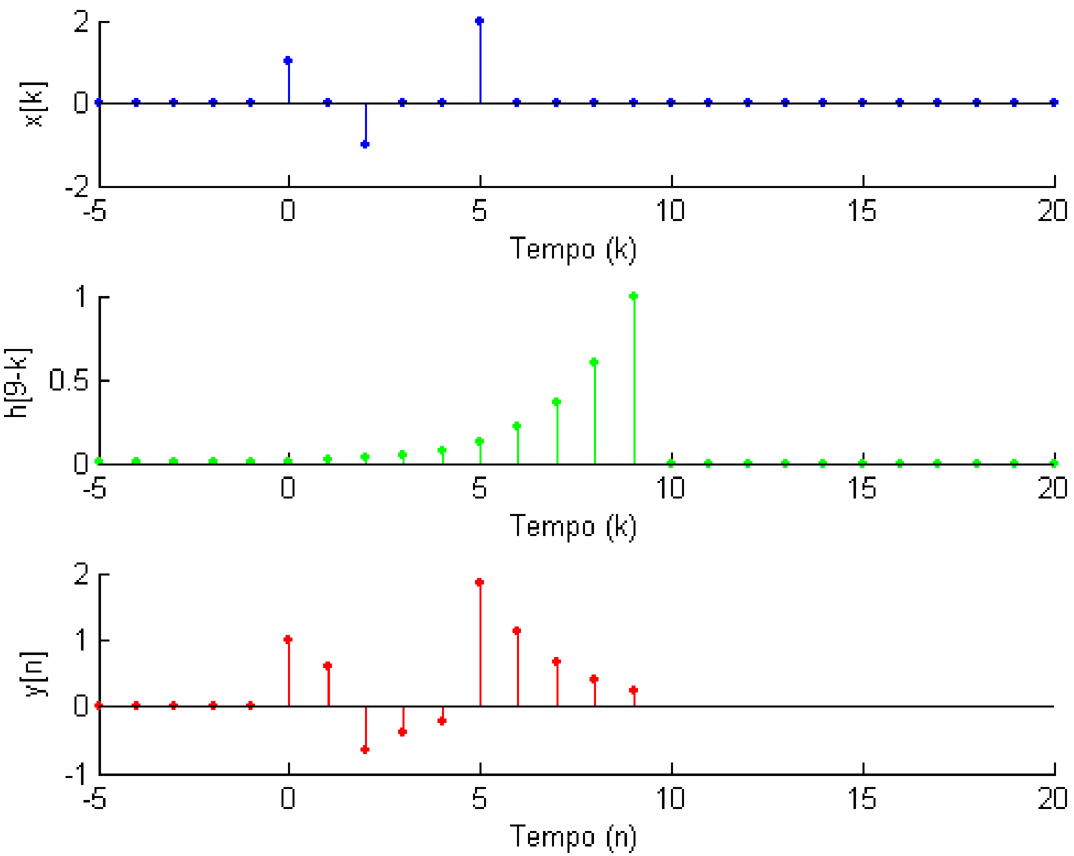


x[k]
2
0
-2
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
h[7-k]
1
0.5
0
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
y[n]
2
1
0
-1
-5
0
5
10
15
20
Tempo (n)

n = 8

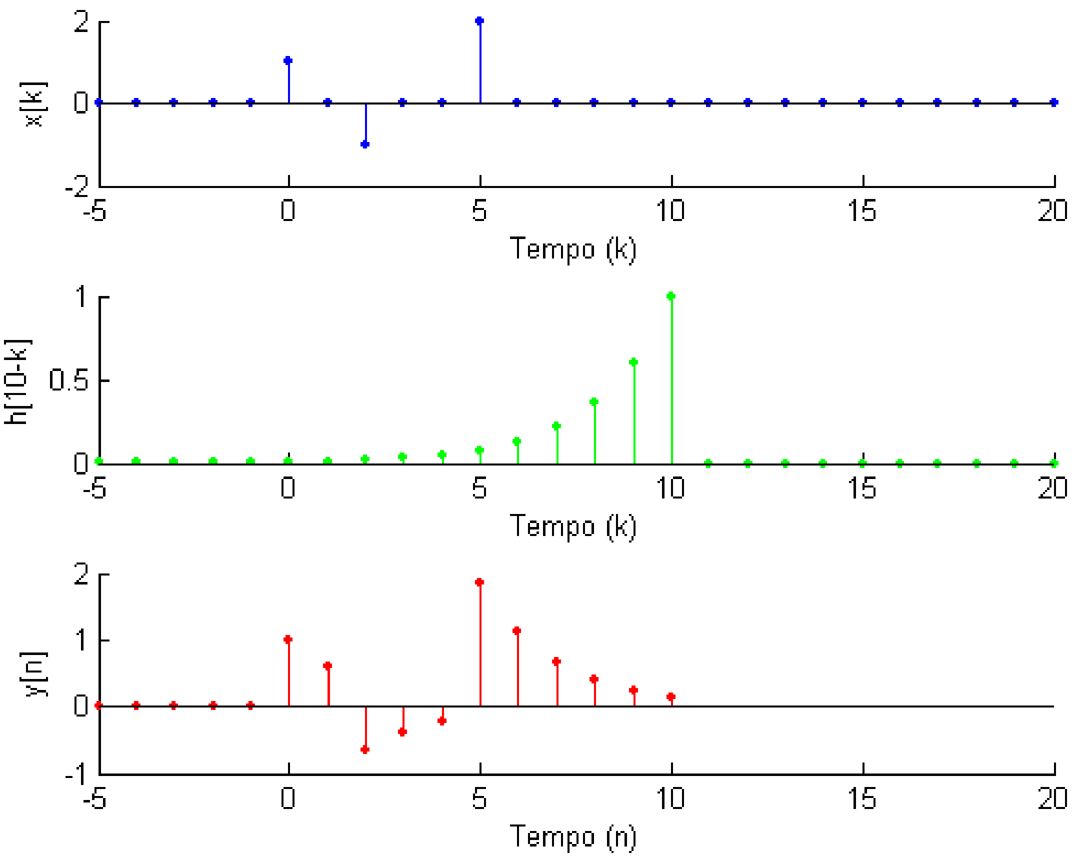


n = 9

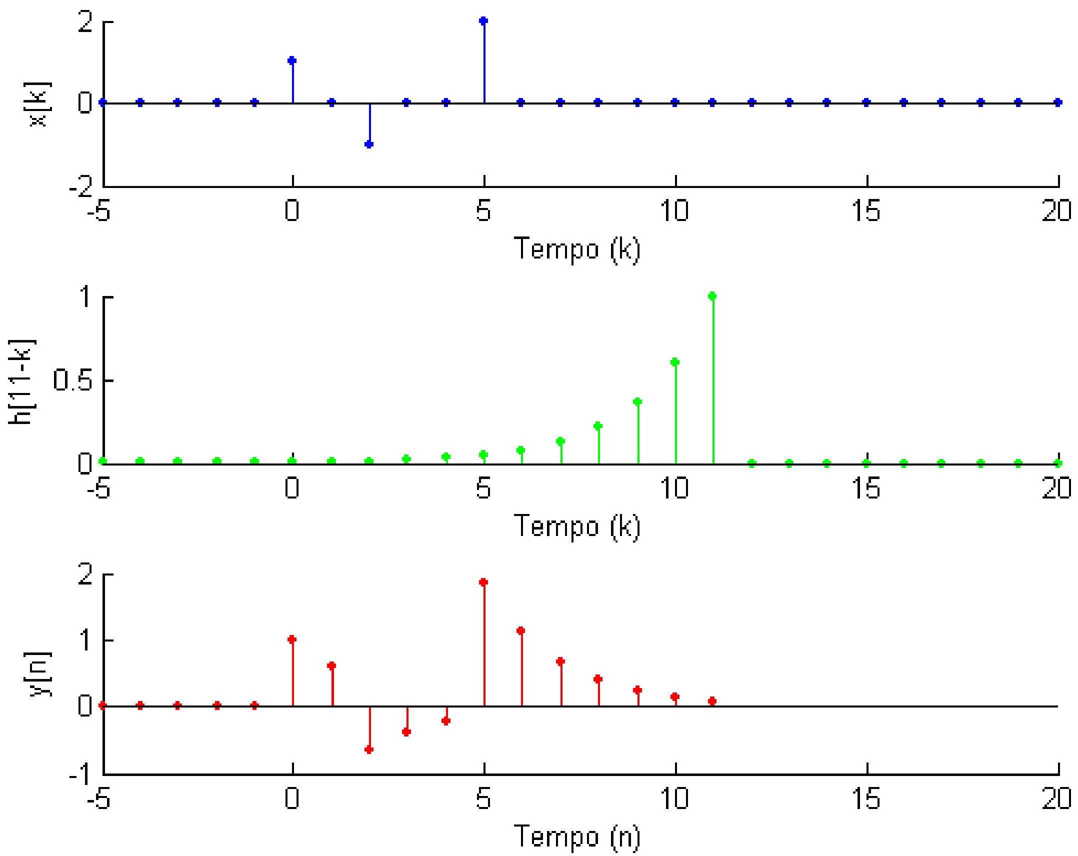


x[k]
2
0
-2
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
h[9-k]
1
0.5
0
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
y[n]
2
1
0
-1
-5
0
5
10
15
20
Tempo (n)

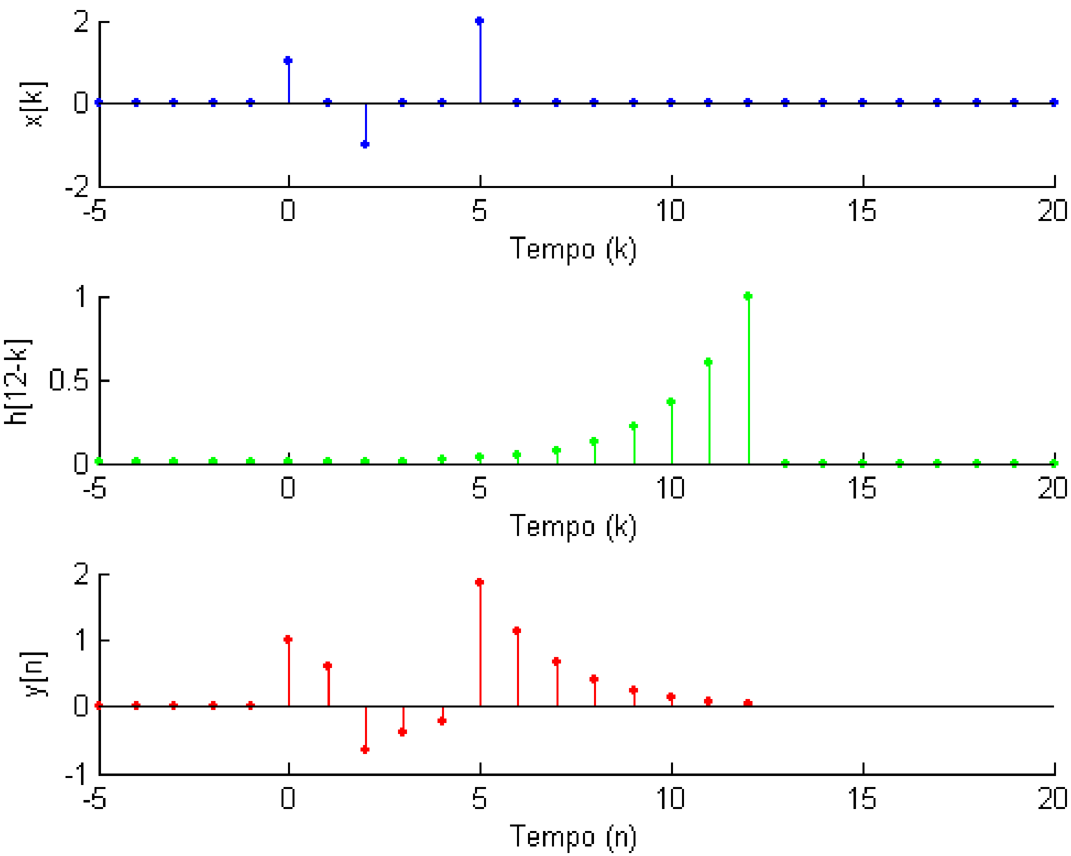
n = 10


2
0
-2
x[k]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
1
0.5
0
h[10-k]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
2
1
0
-1
y[n]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (n)

n = 11

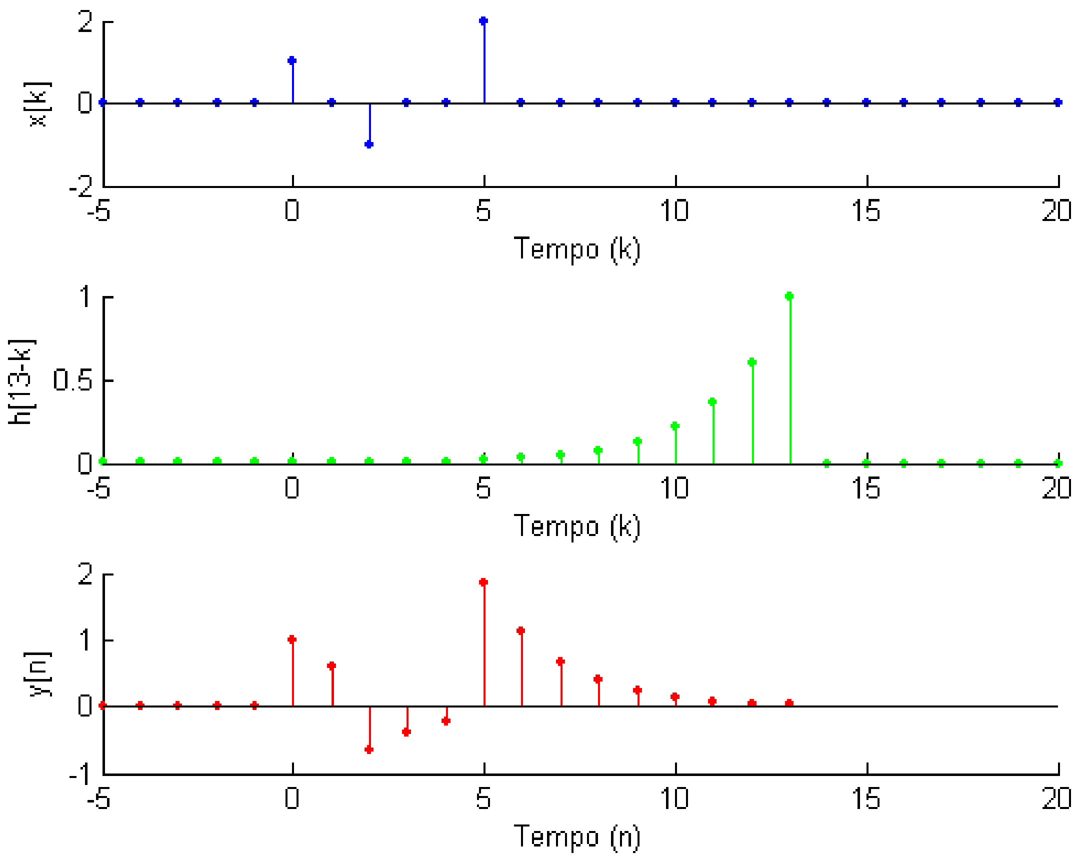


$n = 12$



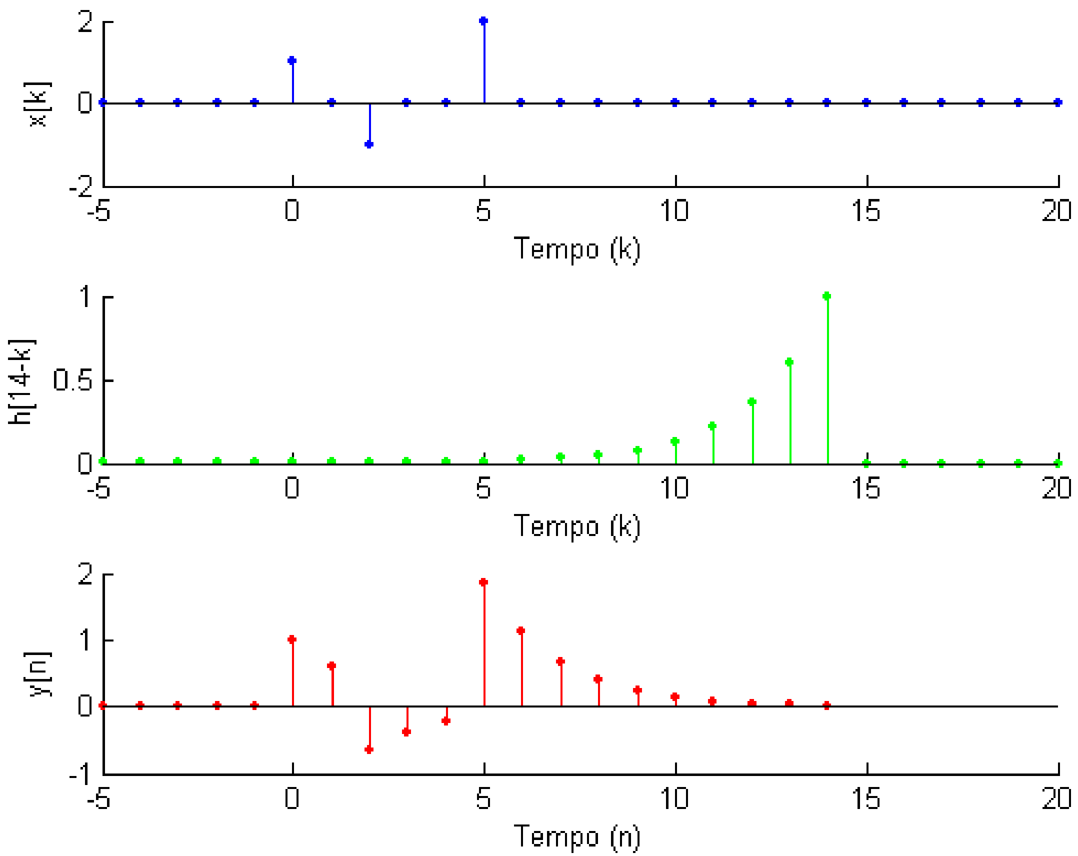
2
0
-2
x[k]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
1
0.5
0
h[12-k]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
2
1
0
-1
y[n]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (n)

n = 13



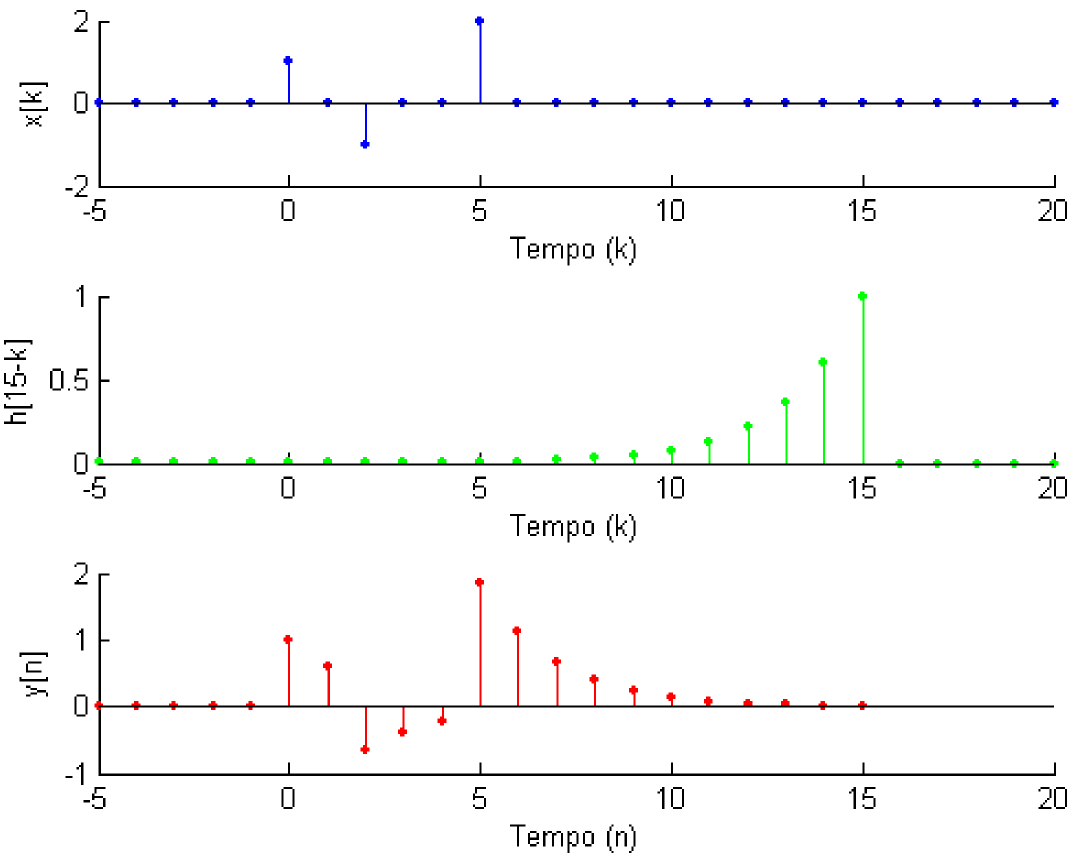
x[k]
2
0
-2
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
h[13-k]
1
0.5
0
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
y[n]
2
1
0
-1
-5
0
5
10
15
20
Tempo (n)

n = 14



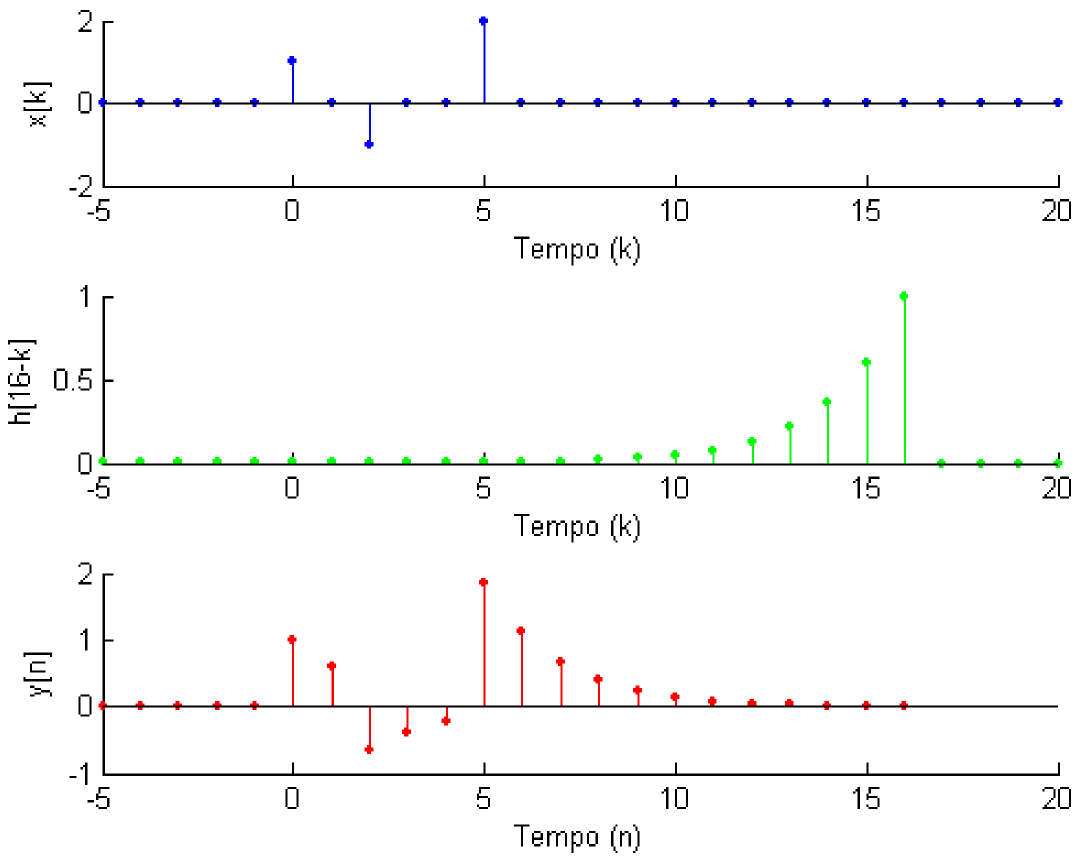
x[k]
2
0
-2
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
h[14-k]
1
0.5
0
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
y[n]
2
1
0
-1
-5
0
5
10
15
20
Tempo (n)

n = 15



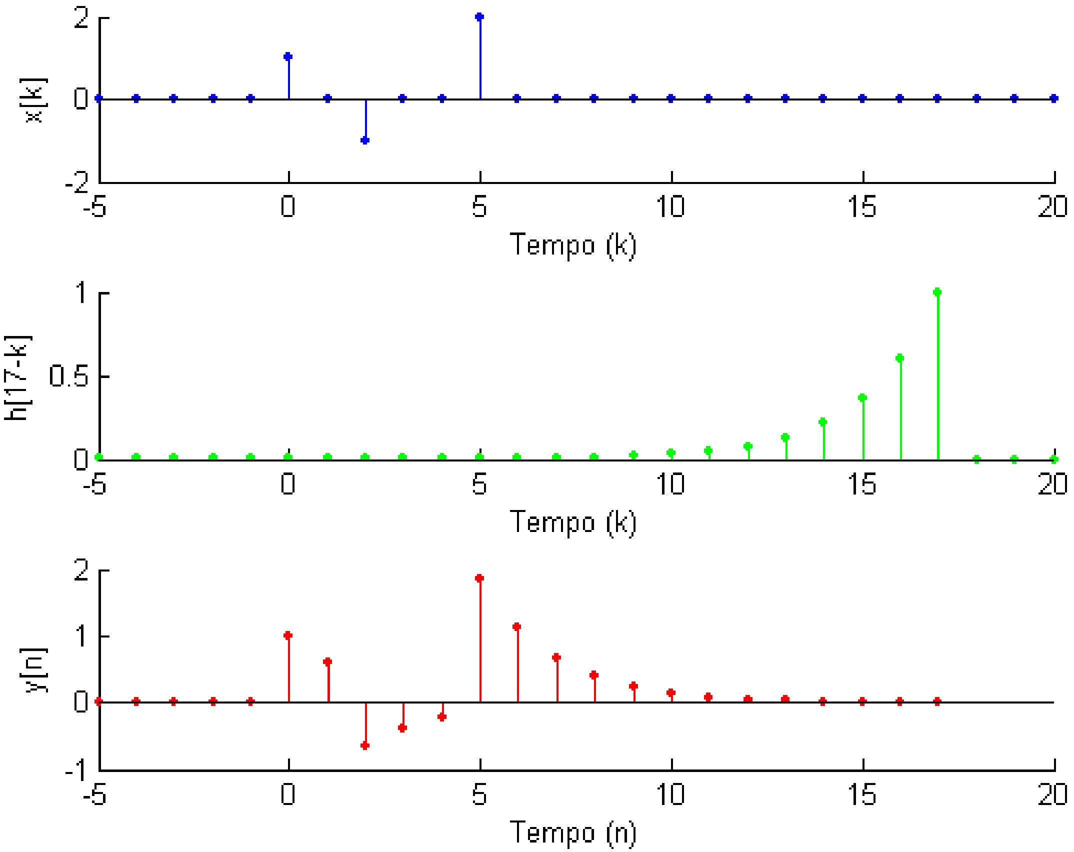
x[k]
2
0
-2
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
h[15-k]
1
0.5
0
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
y[n]
2
1
0
-1
-5
0
5
10
15
20
Tempo (n)

n = 16

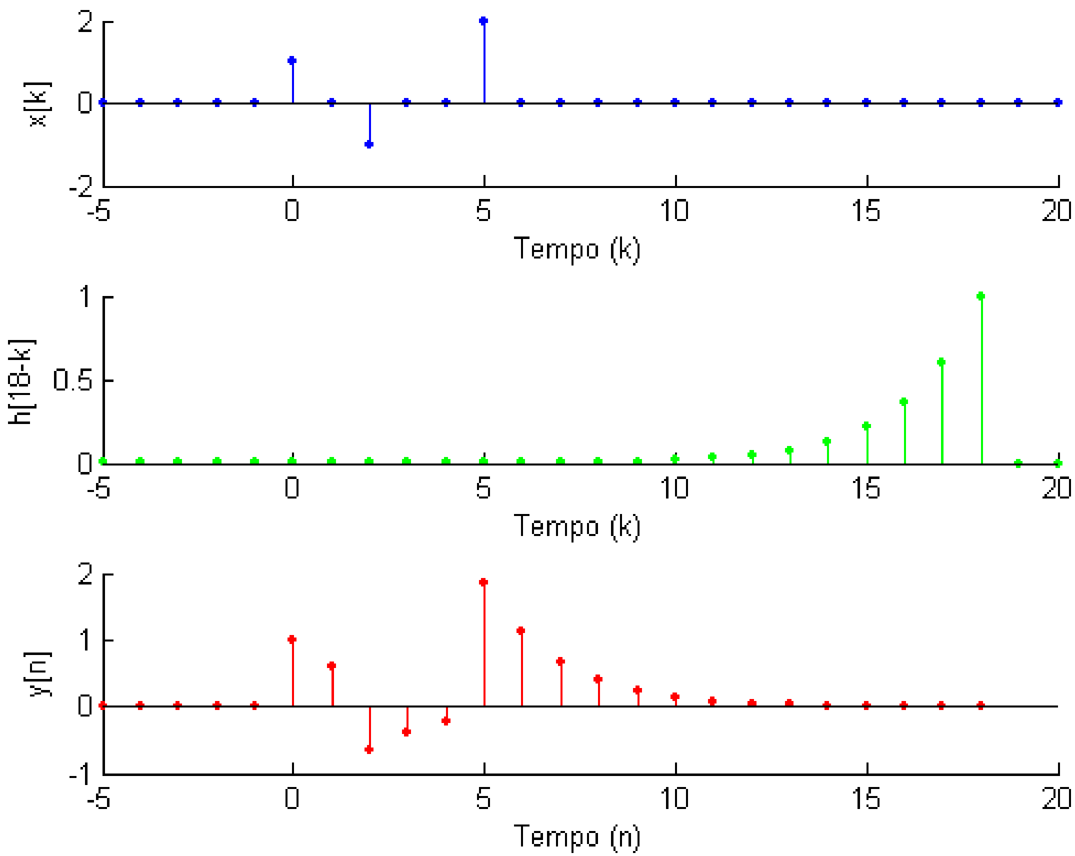


2
0
-2
x[k]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
1
0.5
0
h[16-k]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
2
1
0
-1
y[n]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (n)

$n = 17$

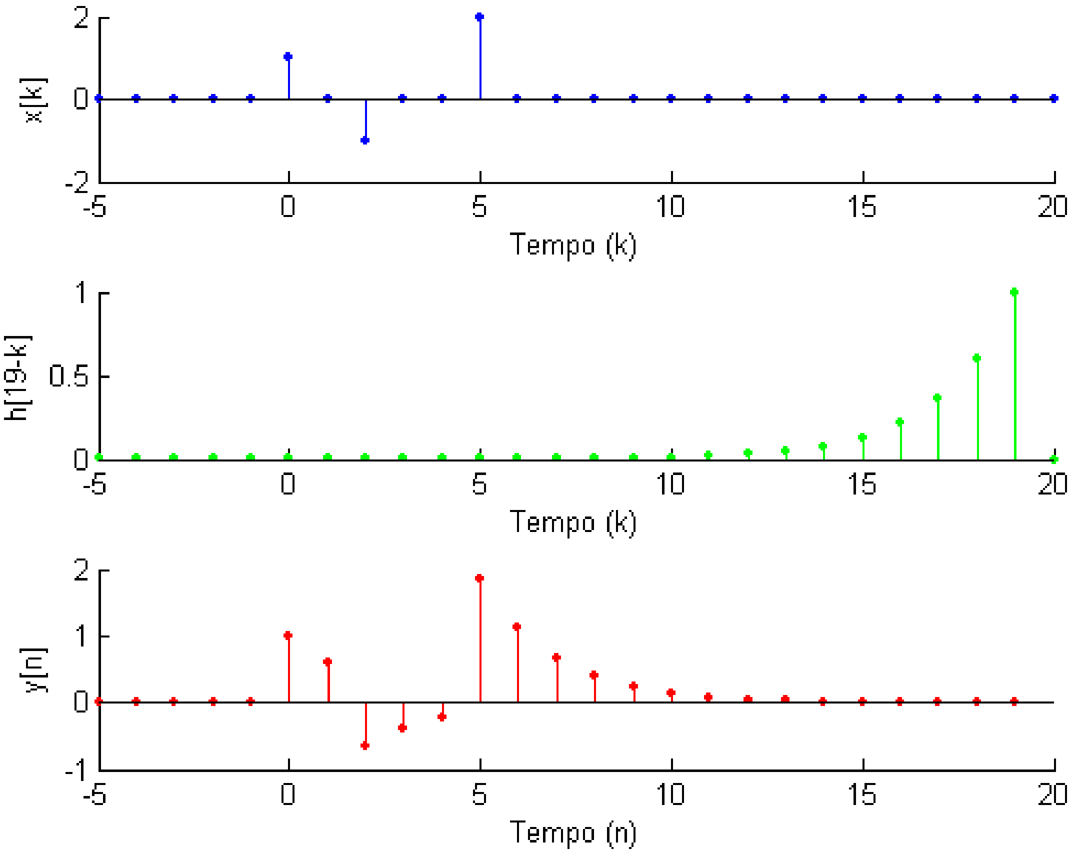

x[k]
2
0
-2
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
h[17-k]
1
0.5
0
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
y[n]
2
1
0
-1
-5
0
5
10
15
20
Tempo (n)

n = 18



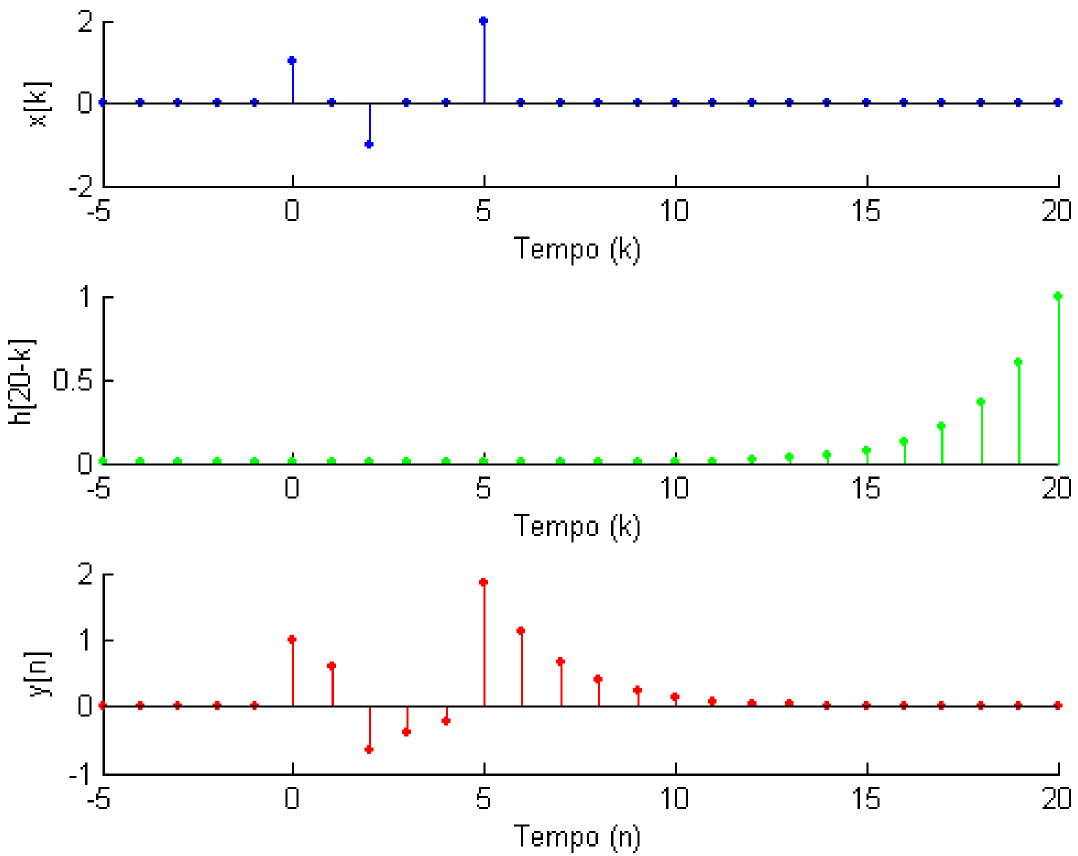
2
0
-2
x[k]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
1
0.5
0
h[18-k]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
2
1
0
-1
y[n]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (n)

n = 19



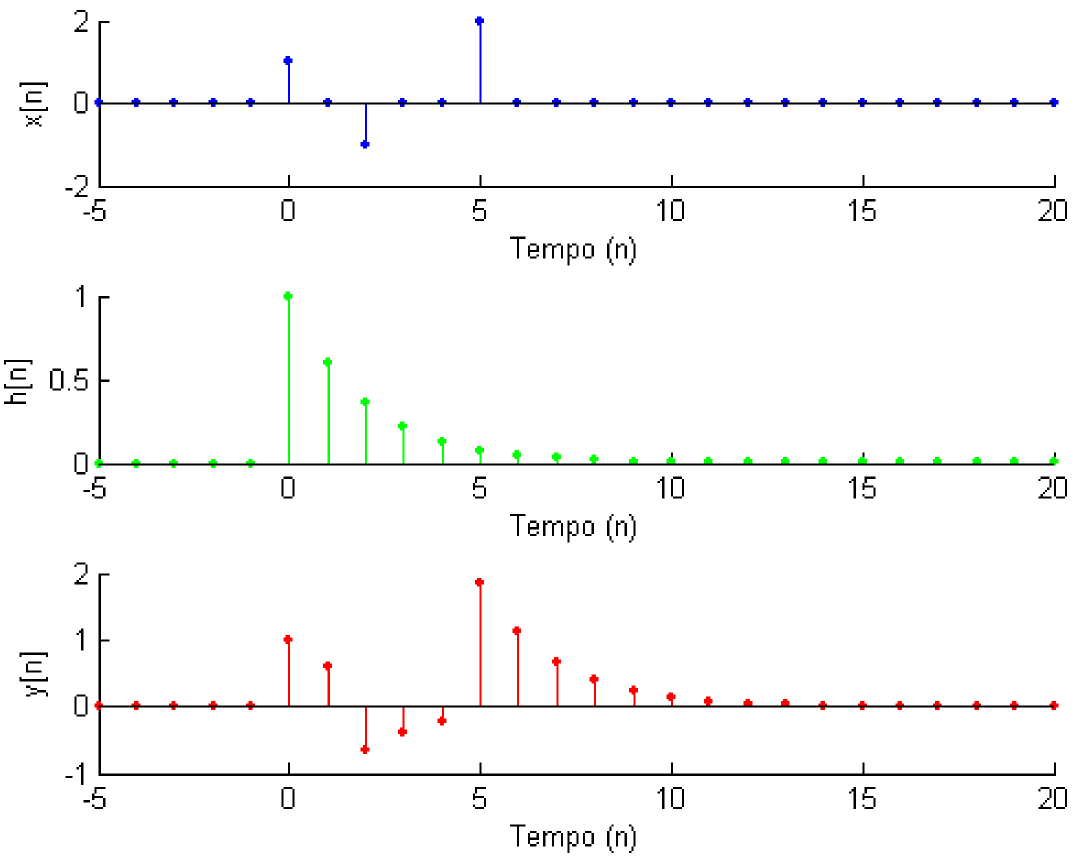
2
0
-2
x[k]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
1
0.5
0
h[19-k]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
2
1
0
-1
y[n]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (n)

n = 20



x[k]
2
0
-2
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
h[20-k]
1
0.5
0
-5
0
5
10
15
20
Tempo (k)
y[n]
2
1
0
-1
-5
0
5
10
15
20
Tempo (n)

Resumindo...



2
0
-2
x[n]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (n)
1
0.5
0
h[n]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (n)
2
1
0
-1
y[n]
-5
0
5
10
15
20
Tempo (n)

Educational Matlab GUIs

- Demos sobre Processamento de Sinais: Convolução, Série de Fourier, Transformadas, etc...

http://users.ece.gatech.edu/mcclella/matlabGUIs/index.html

(Acesso em 19/08/2011)

- Ainda há tempo? Vamos brincar um pouco com a *Discrete Convolution Demo*! ☺

Novidade

O ENUNCIADO DO SEGUNDO TRABALHO JÁ ESTÁ DISPONÍVEL NA PÁGINA DA DISCIPLINA!