

Sinais e Sistemas

Série de Fourier

Renato Dourado Maia

Faculdade de Ciência e Tecnologia de Montes Claros

Fundação Educacional Montes Claros

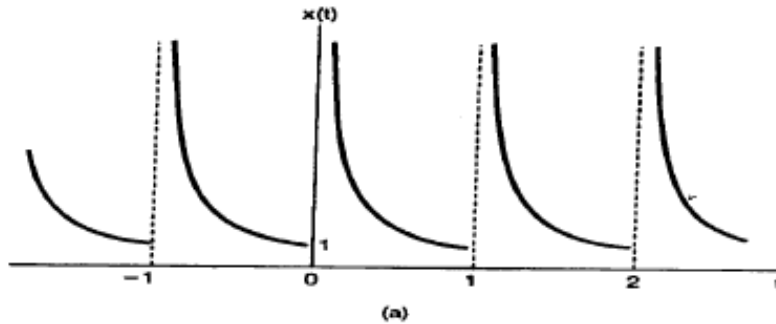


Convergência da FS

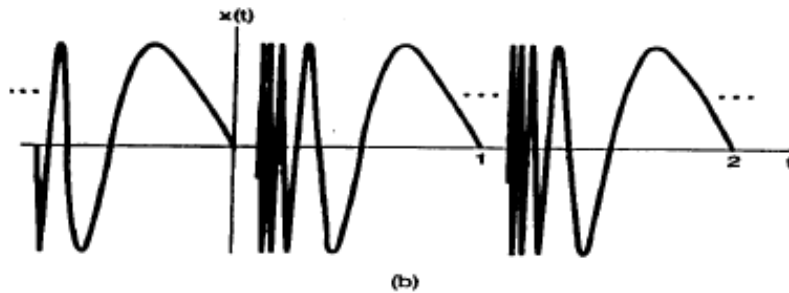
- Um sinal periódico contínuo possui uma representação em Série de Fourier se ele satisfaz às seguintes condições de Dirichlet:
 1. O sinal deve ser limitado.
 2. O sinal deve possuir um número finito de máximos e mínimos num período.
 3. O sinal deve possuir um número finito de descontinuidades num período.

Essas condições garantem que o sinal é igual à sua representação em FS, exceto em valores isolados de tempo para os quais o sinal é descontínuo.

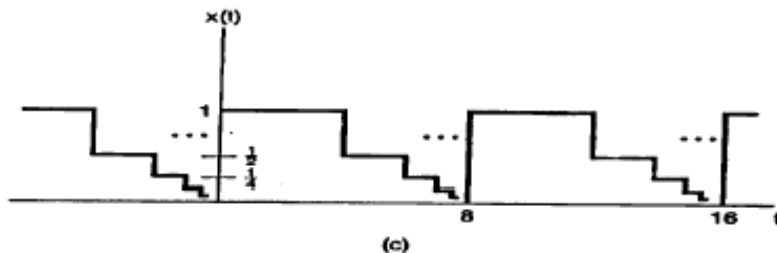
Convergência da FS



Violação da Primeira
Condição de Dirichlet



Violação da Segunda
Condição de Dirichlet



Violação da Terceira
Condição de Dirichlet

Convergência da FS

- Na prática, o somatório é finito, ou seja, utiliza-se a Série de Fourier Truncada, que contempla as N primeiras harmônicas:

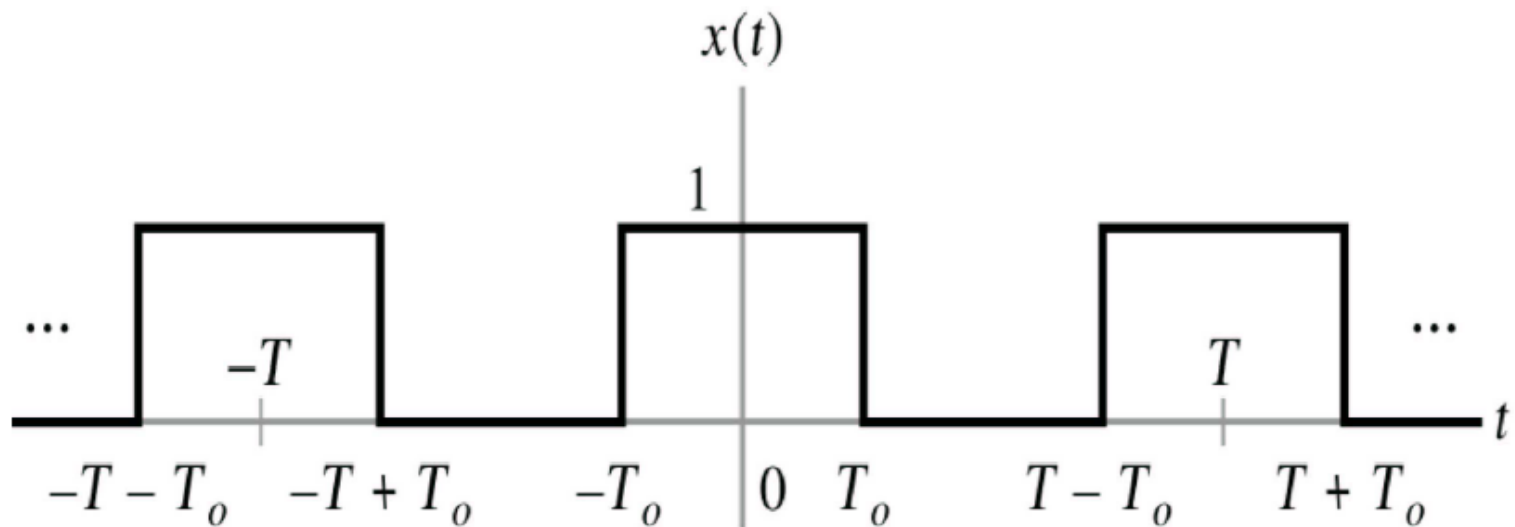
$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{+N} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

Espera-se que a Série Truncada convirja para o sinal x quando N tende a infinito. Felizmente, não há problemas de convergência para uma grande quantidade de classes de sinais periódicos.

[Vejamoss uma animação em Java que ilustra a utilização da Série Truncada de Fourier, apresentando os fasores para cada harmônica...](#)

Sinais Contínuos Periódicos (FS)

Exemplo: Script em Matlab – M_11_SerieFourierProg1.m



Frequência Fundamental? $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

Sinais Contínuos Periódicos (FS)

Exemplo

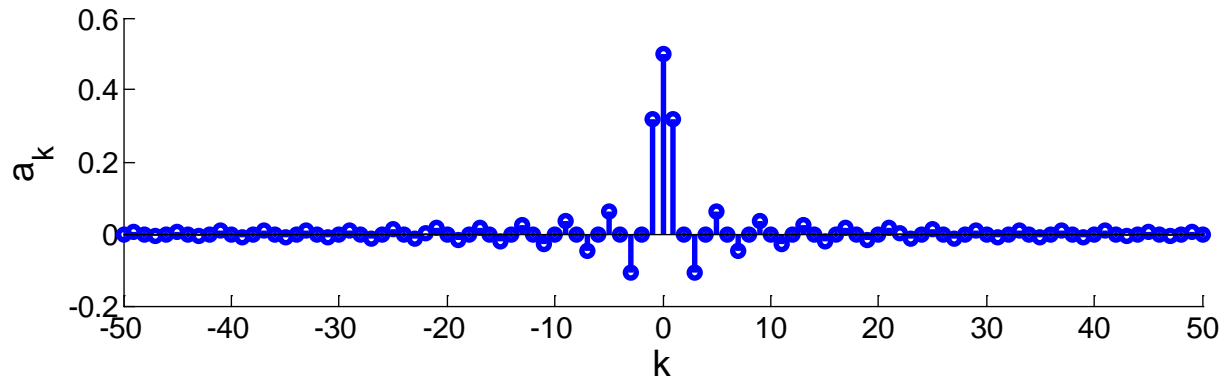
$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T_0}^{T_0} e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{-1}{Tjk\omega_0} e^{-jk\omega_0 t} \Big|_{-T_0}^{T_0} \\ &= \frac{2}{Tk\omega_0} \frac{e^{jk\omega_0 T_0} - e^{-jk\omega_0 T_0}}{2j} = \frac{2 \operatorname{sen}(k\omega_0 T_0)}{Tk\omega_0} = \frac{2T_0}{T} \frac{\operatorname{sen}(k\omega_0 T_0)}{k\omega_0 T_0} \\ &= \frac{2T_0}{T} \frac{\operatorname{sen}\left(k \frac{2\pi}{T} T_0\right)}{k \frac{2\pi}{T} T_0} = \frac{2T_0}{T} \frac{\operatorname{sen}\left(\pi k \frac{2T_0}{T}\right)}{\pi k \frac{2T_0}{T}} = \boxed{\frac{2T_0}{T} \operatorname{sinc}\left(k \frac{2T_0}{T}\right)} \end{aligned}$$

$$\operatorname{sinc}(u) = \frac{\operatorname{sen}(\pi u)}{\pi u} \rightarrow \text{Função sinc}$$

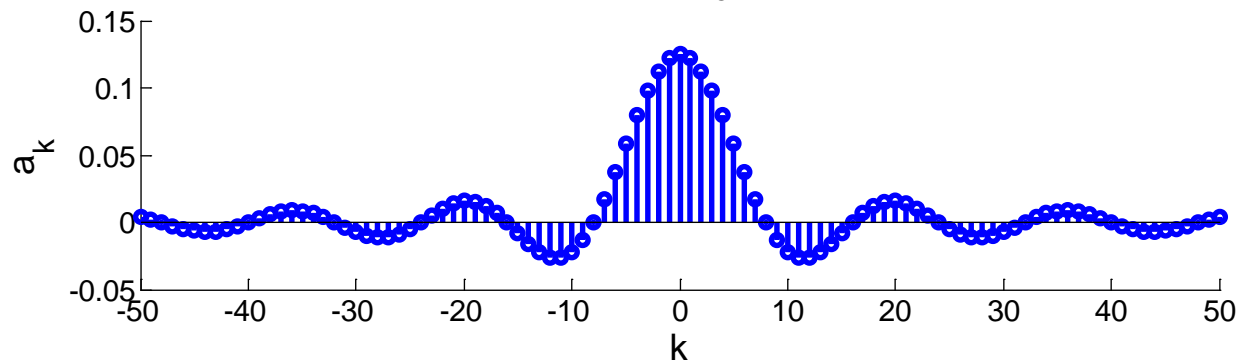
Sinais Contínuos Periódicos (FS)

Exemplo

$$T=16, T_o=4$$

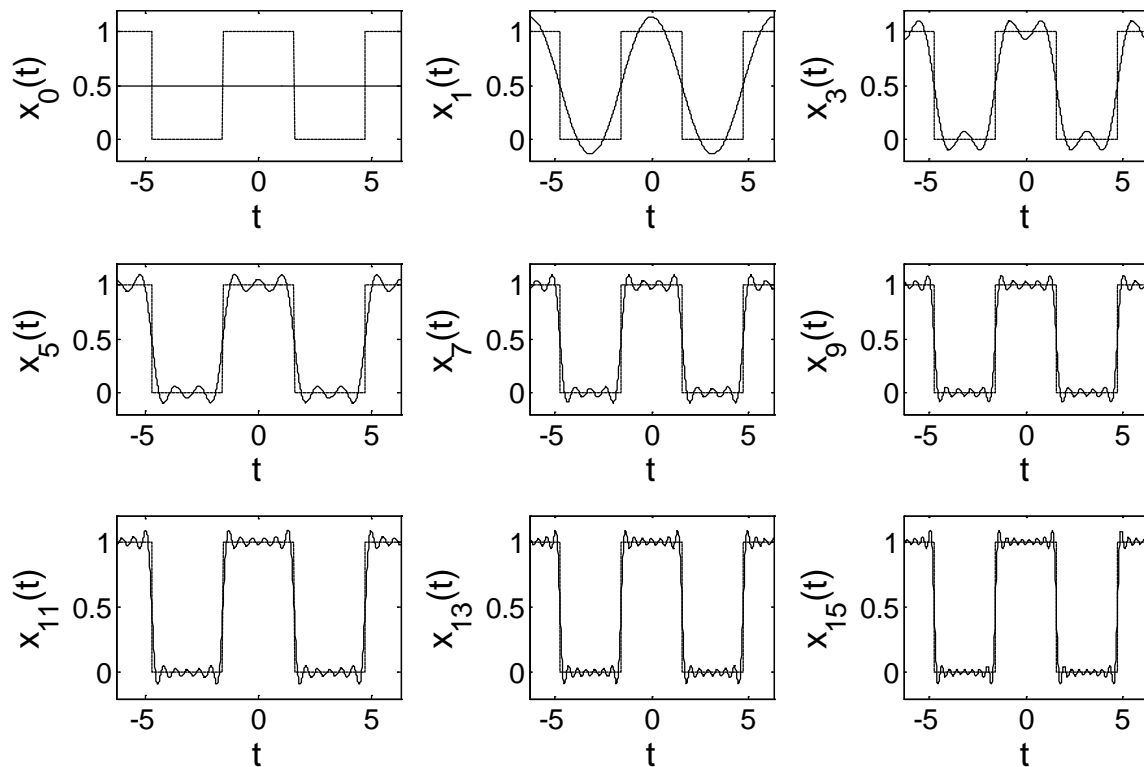


$$T=16, T_o=1$$



Sinais Contínuos Periódicos (FS)

Exemplo – Aproximação do Sinal pela Série Truncada de Fourier



CE6.m: arquivos do livro do Sinais e Sistemas Lineares, segunda edição

$x_i(t) \rightarrow i$ é a quantidade de harmônicas utilizadas

Convergência da FS

- Vimos que se espera que a Série Truncada convirja para o sinal x quando N tende a infinito. Será que isso acontece sempre?
 - Já sabemos que um sinal periódico contínuo possui uma representação em Série de Fourier se ele satisfaz às condições de Dirichlet, mas sabemos também que a aproximação não é perfeita em pontos de descontinuidade. Esse é o Fenômeno Gibbs...

[Vejam uma outra animação em Java que ilustra a utilização da Série Truncada de Fourier e evidencia o Fenômeno Gibbs...](#)

Convergência da FS

- Existem métodos para reduzir ou eliminar o efeito do Fenômeno Gibbs. Essencialmente, tais métodos são diferentes maneiras de modificar (ponderar) os coeficientes da FS truncada, e são conhecidos como métodos de janelamento.

[Vejam os uma animação em Java que ilustra a utilização de janelamento para redução do efeito do Fenômeno Gibbs...](#)

Sinais Contínuos Periódicos (FS)

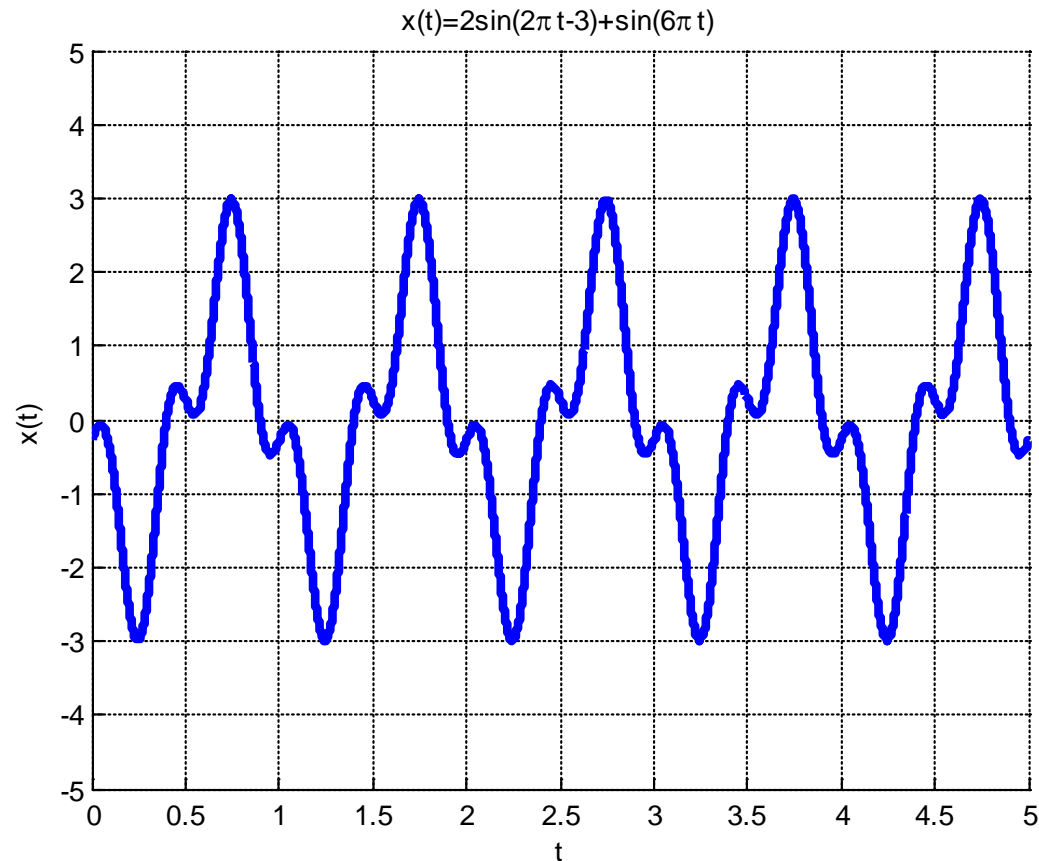
Exemplo

- Calcular a FS para o sinal apresentado a seguir:

$$x(t) = 2\text{sen}(2\pi t - 3) + \text{sen}(6\pi t)$$

Sinais Contínuos Periódicos (FS)

Exemplo



Sinais Contínuos Periódicos (FS)

Exemplo

$$x(t) = 2\text{sen}(2\pi t - 3) + \text{sen}(6\pi t)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = 2 \frac{e^{j(2\pi t - 3)} - e^{-j(2\pi t - 3)}}{2j} + \frac{e^{j6\pi t} - e^{-j6\pi t}}{2j} \\ x(t) = -je^{j(2\pi t - 3)} + je^{-j(2\pi t - 3)} - \frac{j}{2}e^{j6\pi t} + \frac{j}{2}e^{-j6\pi t} \\ x(t) = \frac{j}{2}e^{j(-3)2\pi t} + je^{j(-1)2\pi t}e^{j3} - je^{j(1)2\pi t}e^{-j3} - \frac{j}{2}e^{j(3)2\pi t} \end{array} \right.$$

Sinais Contínuos Periódicos (FS)

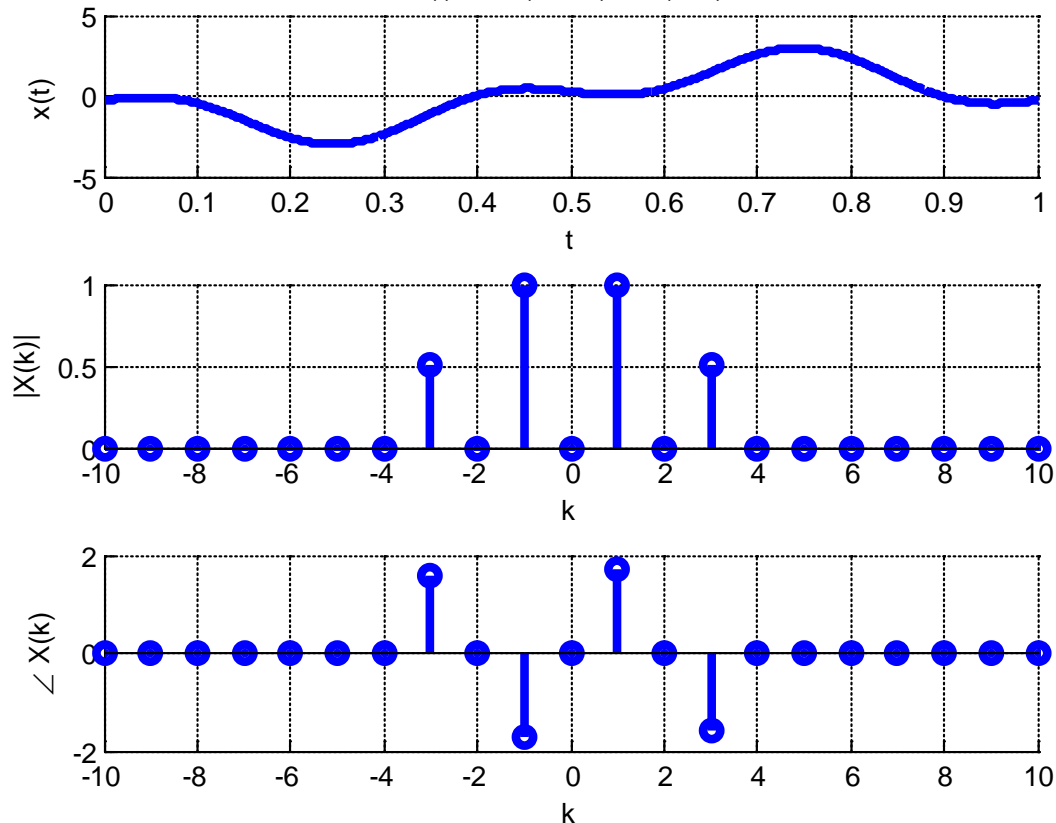
Exemplo

$$a_k = \begin{cases} \frac{j}{2} = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{2}}, & k = -3 \\ je^{j3} = 1e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j3} = 1e^{j(\frac{\pi}{2}+3)}, & k = -1 \\ -je^{j3} = e^{j\pi} e^{j\frac{\pi}{2}} e^{-j3} = e^{j(\frac{3\pi}{2}-3)}, & k = 1 \\ -\frac{j}{2} = \frac{1}{2} e^{j\pi} e^{j\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}}, & k = 3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Sinais Contínuos Periódicos (FS)

Exemplo

$$x(t) = 2\sin(2\pi t - 3) + \sin(6\pi t)$$

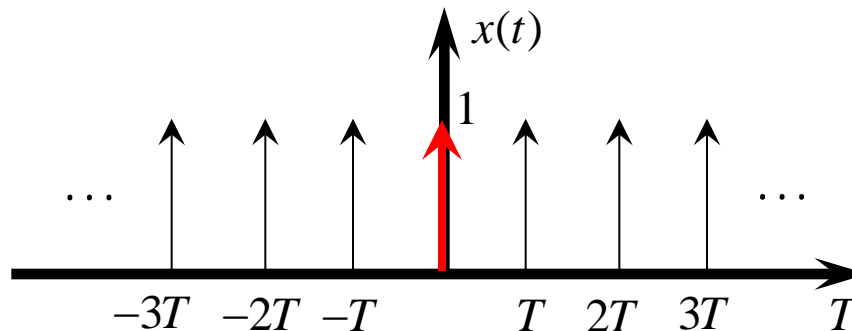


Sinais Contínuos Periódicos (FS)

Exemplo

- Calcular a FS para o sinal a seguir:

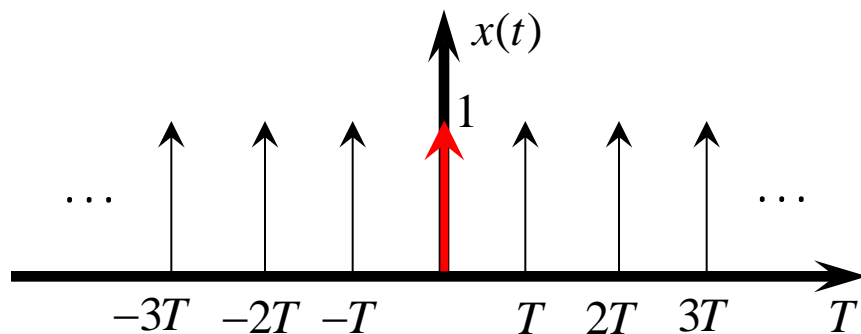
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$



Sinais Contínuos Periódicos (FS)

Exemplo

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$



$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \forall k$$

Algumas Propriedades da FS

Linearidade

$$x(t) \stackrel{FS}{\leftrightarrow} a_k$$

$$y(t) \stackrel{FS}{\leftrightarrow} b_k$$

$$z(t) = Ax(t) + By(t) \stackrel{FS}{\leftrightarrow} c_k = Aa_k + Bb_k$$

Deslocamento no Tempo

$$x(t) \stackrel{FS}{\leftrightarrow} a_k$$

$$x(t - t_0) \stackrel{FS}{\leftrightarrow} e^{-jk\omega_0 t_0} a_k$$

Algumas Propriedades da FS

Reflexão no Tempo

$$x(t) \stackrel{FS}{\leftrightarrow} a_k$$

$$x(-t) \stackrel{FS}{\leftrightarrow} a_{-k}$$

O que se pode dizer sobre os coeficientes da FS para sinais **pares** e **ímpares** ?

$$a_k = a_{-k} \qquad -a_k = a_{-k}$$

Algumas Propriedades da FS

Mudança de Escala no Tempo

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$x(\alpha t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(\alpha\omega_0)t}$$

$\therefore \alpha$ é um número positivo real

Conjugado e Simetria

$$x(t) \stackrel{FS}{\leftrightarrow} a_k$$

$$x^*(t) \stackrel{FS}{\leftrightarrow} a_{-k}^*$$

Algumas Propriedades da FS

Multiplicação

$$x(t) \stackrel{FS}{\leftrightarrow} a_k$$

$$y(t) \stackrel{FS}{\leftrightarrow} b_k$$

$$x(t)y(t) \stackrel{FS}{\leftrightarrow} h_k = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l}$$

Relação de Parseval

$$\frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

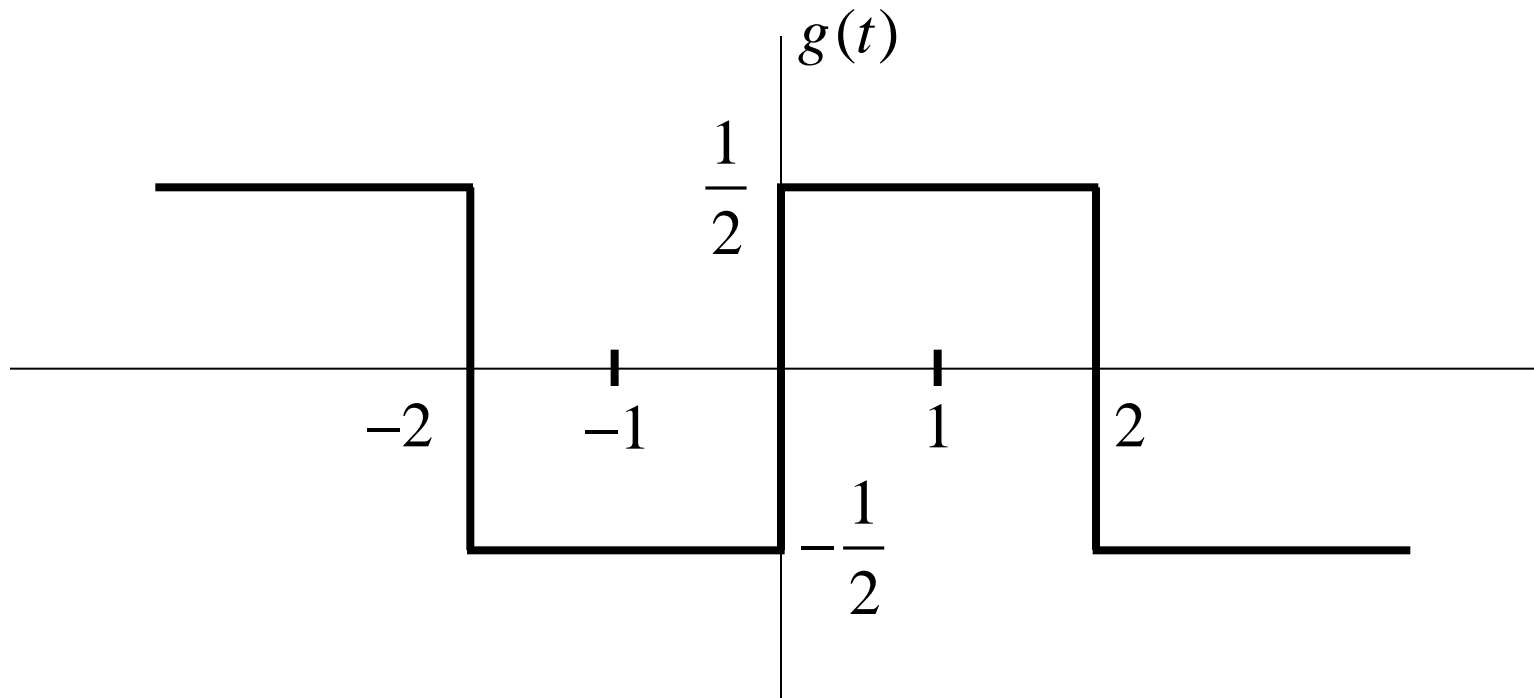
Propriedades da FS

- ❑ A Tabela 3.1 (página 206 do livro *Signals and Systems*) resume as propriedades da FS: algumas propriedades apresentadas na tabela não estão nos *slides*...
- ❑ As propriedades são interessantes para facilitar a determinação dos coeficientes da FS de um sinal, evitando a realização de contas desnecessárias.
- ❑ Leiam sobre as propriedades, pois o livro apresenta comentários interessantes...

Propriedades da FS

Exemplo

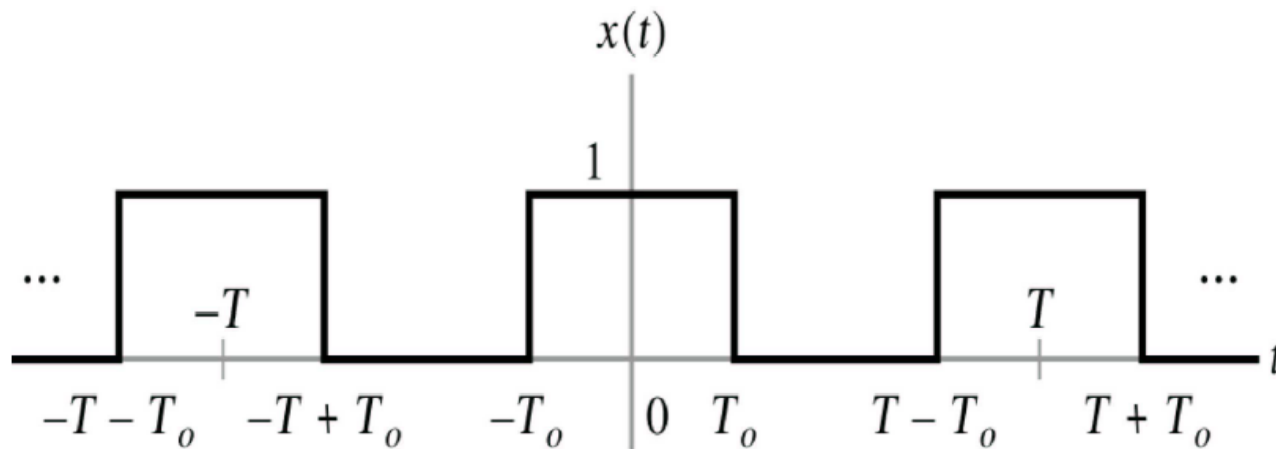
- Calcular a FS para o sinal a seguir:



Propriedades da FS

Exemplo

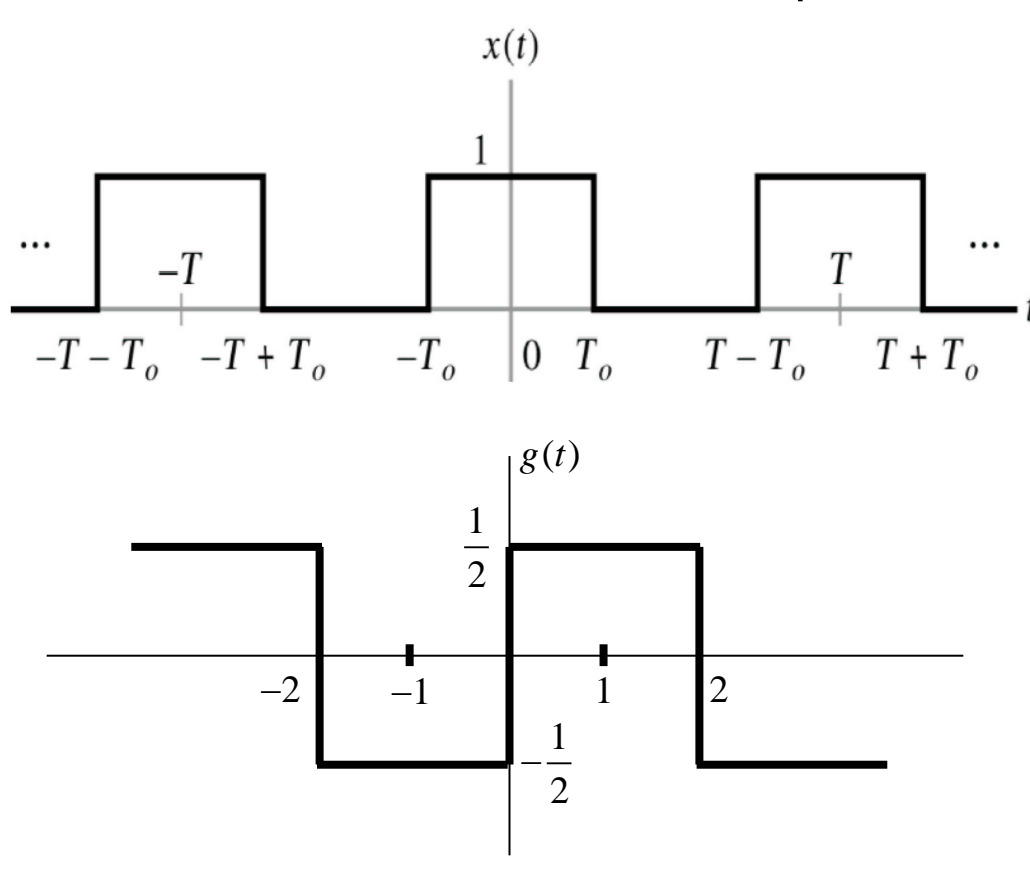
- Lembrando:



$$a_k = \frac{2T_0}{T} \operatorname{sinc}\left(k \frac{2T_0}{T}\right)$$

Propriedades da FS

Exemplo



$$g(t) = x(t-1) - \frac{1}{2}$$

$$T_0 = 1, \quad T = 4$$

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2}$$



Propriedades da FS

Exemplo

$$g(t) = x(t-1) - \frac{1}{2}$$

$$g(t) = x_1(t) + x_2(t)$$



Aplicar Linearidade!!!

$$x_1(t) \stackrel{FS}{\leftrightarrow} b_k$$

$$x_2(t) \stackrel{FS}{\leftrightarrow} c_k$$

$$g(t) = x_1(t) + x_2(t) \stackrel{FS}{\leftrightarrow} d_k = b_k + c_k$$

Propriedades da FS

Exemplo

$x_1(t) = x(t-1)$ \longrightarrow Aplicar Deslocamento no Tempo!!!

$$\left. \begin{array}{l} x(t) \stackrel{FS}{\leftrightarrow} a_k \\ x(t-t_0) \stackrel{FS}{\leftrightarrow} e^{-jk\omega_0 t_0} a_k \end{array} \right\} b_k = e^{-jk\frac{\pi}{2}} a_k$$

$$x_2(t) = -\frac{1}{2} \longrightarrow c_k = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ -\frac{1}{2}, & k = 0 \end{cases}$$

Propriedades da FS

Exemplo

$$x_1(t) \stackrel{FS}{\leftrightarrow} b_k$$

$$x_2(t) \stackrel{FS}{\leftrightarrow} c_k$$

$$g(t) = x_1(t) + x_2(t) \stackrel{FS}{\leftrightarrow} d_k = b_k + c_k$$

$$b_k = e^{-jk\frac{\pi}{2}} a_k$$

$$c_k = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ -\frac{1}{2}, & k = 0 \end{cases}$$

$$d_k = \begin{cases} e^{-jk\frac{\pi}{2}} a_k, & k \neq 0 \\ a_0 - \frac{1}{2}, & k = 0 \end{cases}$$

Propriedades da FS

Exemplo

$$d_k = \begin{cases} e^{-jk\frac{\pi}{2}} a_k, & k \neq 0 \\ a_0 - \frac{1}{2}, & k = 0 \end{cases}$$

$$a_k = \frac{2T_0}{T} \operatorname{sinc}\left(k \frac{2T_0}{T}\right) \xrightarrow{T_0=1, T=4} a_k = \frac{1}{2} \operatorname{sinc}\left(k \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen}\left(\pi k \frac{1}{2}\right)}{\pi k \frac{1}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{\pi k}$$

$$d_k = \begin{cases} e^{-jk\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{\pi k}, & k \neq 0 \\ 0, & k = 0 \end{cases}$$

Educational Matlab GUIs

- Demos sobre Processamento de Sinais: Convolução, Série de Fourier, Transformadas, etc...

<http://users.ece.gatech.edu/mcclella/matlabGUIs/index.html>

(Acesso em 03/03/2007)

- Vamos brincar um pouco com a [Fourier Series Demo!](#) 😊

Exercício

Exercício 3.1 – *Signals and Systems*

- Um sinal periódico de tempo contínuo $x(t)$ é real, e tem período fundamental $T = 8$. Os coeficientes não nulos da FS de $x(t)$ são:

$$a_1 = a_{-1} = 2, \quad a_3 = a_{-3}^* = 4j.$$

- Expresse $x(t)$ na forma:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(\omega_k t + \phi_k)$$